

Отчёт по гранту
«Молодая математика России»
за 2018 год
Андрей Трепалин

1. РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ В ЭТОМ ГОДУ

В 2018 году продолжают исследования факторов рациональных поверхностей по конечным группам автоморфизмов над полями характеристики 0. По критерию Кастельнуово для алгебраически замкнутого поля характеристики 0 всякий фактор рациональной поверхности является рациональным. Для алгебраически незамкнутого поля это не так. Таким образом, в первую очередь нас интересуют, какие есть возможности для действия конечных групп на рациональных поверхностях, для которых фактор-поверхность не будет рациональна.

Применяя программу минимальных моделей, получаем, что для размерности 2 всякий фактор геометрически рациональной поверхности по конечной группе является, либо фактором по этой группе минимального расслоения на коники над проективной прямой (этот случай исследован ранее), либо фактором по этой группе минимальной гладкой поверхности дель Пеццо (поверхности, для которой антиканонический класс очень обилен). Текущие исследования позволяют получить полную классификацию случаев минимального действия группы на рациональной поверхности, для которого фактор не является рациональным.

В этом году опубликованы работы «Quotients of del Pezzo surfaces of high degree» и «Quotients of del Pezzo surfaces of degree 2», в которых исследованы поверхности дель Пеццо степеней 8, 5, 4 и 2. Основные результаты первой из работ состоят в том, что для поверхностей дель Пеццо степени 5 и выше фактор по конечной группе всегда является рациональным в случае наличия точки, определённой над полем. Также показано, что фактор может быть нерациональным по четырём группам: тривиальная группа, группа порядка 2, циклическая группа порядка 4 и нециклическая группа порядка 4. Для тривиальной группы в случае минимального действия и поверхность, и её фактор нерациональны по критерию рациональности Исковских. Для остальных групп в случае минимального действия построены всевозможные примеры рациональных и нерациональных факторов рациональных и нерациональных минимальных поверхностей

Для поверхности дель Пеццо степени 2 ситуация значительно сложнее. Фактор поверхности может быть нерациональным для довольно большого списка групп: тривиальная группа, группа порядка 2 (два случая), группа порядка 3, циклическая группа порядка 4 (два случая), абелева нециклическая группа порядка 4, симметрическая группа степени 3, диэдральная группа порядка 8, неабелева группа Q_8 порядка 8 (два случая). Такое большое разнообразие случаев связано с тем, что для одной из групп порядка 2, фактор бирационально эквивалентен *поверхности Исковских* — специфического расслоения на коники с 4 вырожденными слоями и двумя выделенными сечениями с индексом самопересечения -2 , которое также может быть получено как фактор произведения проективной прямой на эллиптическую кривую по естественной инволюции. Изогении на эллиптической кривой продолжают до «рациональных накрытий» соответствующей поверхности Исковских.

В итоге для всех групп, содержащих соответствующую подгруппу порядка 2, построены всевозможные примеры рациональных и нерациональных факторов рациональных и нерациональных минимальных поверхностей дель Пеццо степени 2. Для другой группы порядка 2 показано, что в случае минимальности и поверхность, и фактор являются нерациональными.

Таким образом, по этой теме остаётся не исследованным до конца лишь случай факторов поверхностей дель Пеццо степени 1. В этом случае возникает 5 групп, по которым фактор может не быть рациональным. При этом для тривиальной группы и группы порядка 2 и поверхность, и её фактор являются нерациональными в случае минимального действия (для группы порядка 2 соответствующие рассуждения приведены в работе «Quotients of del Pezzo surfaces of degree 2»).

Другой темой исследования были поверхности дель Пеццо над конечными полями (в соавторстве с Даниэлем Лафраном). Каждая из таких поверхностей имеет определённый тип, определяемый классом сопряжённости образа элемента Фробениуса в соответствующей группе Вейля. В препринте «Inverse Galois problem for del Pezzo surfaces over finite fields» получены результаты, касающиеся существования не полностью разобранных ранее типов минимальных поверхностей дель Пеццо степени 3 и 2. Для этих двух типов поверхностей степени 3 и 2 соответственно было показано, что соответствующий тип минимальной поверхности дель Пеццо степени 3 существует над всеми конечными полями, а тип минимальной поверхности дель Пеццо степени 2 существует над всеми конечными полями, кроме поля из двух элементов, над которым такой тип поверхности дель Пеццо не реализуется.

Третьей темой исследования была стабильная рациональность поверхностей дель Пеццо в случае произвольного поля. В конце прошлого года Ж.-Л. Колльо-Теленом был получен результат, что в случае квазиконечного поля (то есть поля, для которого всякое расширение Галуа обладает циклической группой Галуа) любая нерациональная поверхность также не является стабильно рациональной. В случае произвольных полей это не так: известен пример поверхности дель Пеццо степени 4, являющейся нерациональной, но стабильно рациональной. Однако до сих пор этот пример остаётся единственным. В ходе исследования получены существенные ограничения на типы поверхностей дель Пеццо (в терминах образа абсолютной группы Галуа в соответствующей поверхности группе Вейля), для которых минимальная (с инвариантным числом Пикара 1) поверхность дель Пеццо нерациональна, но может быть стабильно рациональна: 3 случая поверхностей дель Пеццо степени 4 и 5 случаев поверхностей дель Пеццо степени 2. В частности, все минимальные поверхности дель Пеццо степени 3 и 1 не являются стабильно рациональными. Этот результат был получен в феврале Чинкелем и Янгом при помощи хорошо организованного компьютерного перебора. Одновременно с этим мною было получено доказательство этого результата, не использующее вычислительные методы, а основанное на программе минимальных моделей и свойствах элементов групп Вейля. К сожалению, пока эти результаты не оформлены даже в виде препринта.

2. ОПУБЛИКОВАННЫЕ И ПОДАННЫЕ В ПЕЧАТЬ РАБОТЫ

A. Trepalin, Quotients of del Pezzo surfaces of high degree, Transactions of the American Mathematical Society, 2018, 370 (9), 6097–6124

A. Trepalin, Quotients of del Pezzo surfaces of degree 2, Moscow Mathematical Journal, 2018, 18 (3), 557–597

D. Loughran, A. Trepalin, Inverse Galois problem for del Pezzo surfaces over finite fields, Препринт, доступен по адресу <https://arxiv.org/abs/1811.06785>

3. УЧАСТИЕ В КОНФЕРЕНЦИЯХ И ШКОЛАХ

School on Birational Geometry of Hypersurfaces, 19–23 марта, Gargnano del Garda, Италия, 2018 (без доклада)

Международная конференция «Бирациональная геометрия», 26–30 марта, Москва, Россия, 2018. (Доклад «Стабильная рациональность кубических поверхностей»)

Летняя школа-конференция по группам Брауэра, 25–29 июня, Москва, Россия, 2018. (Доклад «Стабильная рациональность поверхностей дель Пеццо»)

Седьмая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», 18–26 августа, Самара, Россия, 2018. (Доклад «Стабильная рациональность поверхностей дель Пеццо»)

4. РАБОТА В НАУЧНЫХ ЦЕНТРАХ И МЕЖДУНАРОДНЫХ ГРУППАХ

В международных группах не работал. Помимо работы в ИППИ и ЛАГ ВШЭ принимал активное участие в семинаре отдела алгебре и отдела алгебраической геометрии (семинаре И.Р. Шафаревича) и семинаре им. В.А. Исковских в МИАН им. Стеклова.

5. ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

С 1 по 24 мая преподавал в Образовательном центре «Сириус» в Сочи на смене для школьников 10-х классов по математике и информатике, организованной факультетом математики и факультетом компьютерных наук НИУ ВШЭ.

6. ИТОГИ ТРЁХ ЛЕТ

По итогам исследований изучена рациональность факторов поверхностей дель Пеццо степени 2 и выше. Планировалось также изучить случай поверхностей дель Пеццо степени 1, но он не завершён (возникла трудность в построении примера нерационального фактора минимальной рациональной поверхности для группы порядка 3). Тем не менее, планируемый результат классификации Галуа унирациональных (то есть бирационально эквивалентных фактору рациональной поверхности по конечной группе автоморфизмов) поверхностей принимает следующий вид. Всякая минимальная Галуа унирациональная поверхность либо рациональна, либо имеет структуру расслоения на коники, либо является поверхностью дель Пеццо степени 4, либо является поверхностью дель Пеццо степени 3, на которой есть хотя бы одна точка Эккардта.

Развитая в ходе исследования техника, позволила исследовать смежные области (рациональные поверхности над конечными полями, стабильная рациональность поверхностей), что видно из первой части отчёта. В то же время на данный момент исследования пока не дошли до многообразий размерности 3 и выше, хотя уже сейчас на основе имеющихся методов возникают замечания и комментарии к работам, исследующим многообразия размерности 3 и выше, которые позволяют качественно улучшить содержание, а в некоторых случаях и усилить результаты этих работ.