

Отчет лауреата конкурса «Молодая математика России» за 2017 год

Егор Ясинский

Напомним, что проект посвящен изучению групп бирациональных автоморфизмов алгебраических многообразий. Группа бирациональных автоморфизмов проективной плоскости $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^2$ над полем \mathbb{K} называется **группой Кремоны** $\text{Cr}_2(\mathbb{K})$ и с алгебраической точки зрения представляет собой группу \mathbb{K} -автоморфизмов поля рациональных функций $\mathbb{K}(x, y)$. Про группу $\text{Cr}_2(\mathbb{C})$ известно достаточно много, и основной интерес для нас представляет группа $\text{Cr}_2(\mathbb{R})$. В исследовании конечных подгрупп в группах Кремоны можно выделить по крайней мере два подхода. Первый (трудный) состоит в их непосредственной классификации, второй (более перспективный при многомерных обобщениях) — выявление общих свойств, которым должны удовлетворять эти подгруппы. В рамках данного проекта работа ведется в обоих направлениях.

Обсудим сначала второй подход. Напомним, что группа Γ называется *жордановой*¹, если существует такая константа $J = J(\Gamma)$, что любая конечная подгруппа $G \subset \Gamma$ содержит нормальную абелеву подгруппу $A \triangleleft G$ с индексом $[G : A] \leq J$. Наименьшее такое J называется *константой Жордана* группы Γ . Терминология оправдана тем фактом, что классическая теорема Камиля Жордана утверждает, что группа $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ жорданова, где \mathbb{K} — поле характеристики нуль. Как следствие, жордановой является любая линейная алгебраическая группа над \mathbb{K} . Хотя группа Кремоны не является алгебраической группой, неформальный принцип гласит, что она обладает многими свойствами линейных алгебраических групп (похожий тезис может быть сформулирован для групп диффеоморфизмов гладких многообразий, групп классов отображений, групп внешних автоморфизмов свободных групп и т.д.). Например, в 2007 г. Ж.-П. Серром было доказано, что группа $\text{Cr}_2(\mathbb{C})$ является жордановой. В 2017 г. автором были вычислены константы Жордана для групп $\text{Cr}_2(\mathbb{C})$, $\text{Cr}_2(\mathbb{R})$ и $\text{Cr}_2(\mathbb{Q})$, см. [1]. Естественно также поинтересоваться, является ли жордановой группа бирациональных автоморфизмов $\text{Bir}(X)$ произвольного алгебраического многообразия X (не обязательно рационального). В. Л. Поповым и Ю. Г. Зархиным было показано, что если X — комплексная проективная поверхность, то группа $\text{Bir}(X)$ жорданова тогда и только тогда, когда X не бирациональна $\mathbb{P}^1 \times E$, где E — эллиптическая кривая. В 2017 автором было показано, что над полем вещественных чисел ситуация упрощается: группа бирациональных автоморфизмов любой вещественной алгебраической поверхности жорданова.

Обсудим теперь первый подход, который заключается в непосредственной классификации конечных подгрупп $\text{Cr}_2(\mathbb{R})$. Конечные подгруппы $\text{Cr}_2(\mathbb{C})$ были классифицированы И. В. Долгачевым и В. А. Исковских в 2007 году. В 2016 г. автором были классифицированы подгруппы нечетного порядка в $\text{Cr}_2(\mathbb{R})$. В настоящее время ведется работа по классификации подгрупп четного порядка. Напомним, что классификация конечных подгрупп в плоской группе Кремоны по сути сводится к описанию конечных групп, минимально действующих на двух типах алгебраических поверхностей — поверхностях дель Пеццо и расслоениях на коники. В 2017 году нам удалось полностью классифицировать инволюции, действующие на вещественных поверхностях дель Пеццо. Кроме того, для некоторых вещественных поверхностей дель Пеццо

¹Терминология предложена В. Л. Поповым

нам удалось полностью классифицировать конечные группы, действующие на этих поверхностях (в том числе минимально). Некоторые из полученных результатов можно найти в статье [2].

Доклады на конференциях и семинарах

- *Конечные группы бирациональных автоморфизмов*, Научно-исследовательский семинар кафедры высшей алгебры МГУ, 4 декабря, г. Москва, МГУ.
- *Finite groups of birational automorphisms*, BASEL-EPFL-Dijon Meeting in Birational Geometry, Basel, Switzerland, November 27–28.
- *Boundedness results for groups of birational self-maps*, EDGE Days 2017, University of Edinburgh, Edinburgh, UK, June 26-30
- *Константа Жордана для плоской группы Кремоны*, Шестая школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов», 30 января—4 февраля, Москва.

Кроме того, являюсь активным участником [семинара имени В. А. Исковских](#) в МИАН, регулярно выступая на нем с обзорными (и исследовательскими) докладами.

Участие в школах и конференциях (помимо обозначенных выше)

- *Advances in Birational Geometry*, Erwin Schrodinger International Institute for Mathematical Physics, Vienna, Austria, April 23–29
- *Current Topics in the Theory of Algebraic Groups*, Dijon, France, July 3–7
- *Conference on Birational Geometry*, Simons Foundation, New York, August 21–25
- *Rationality, stable rationality and birationally rigidity of complex algebraic varieties*, Udine, Italy, September 3–9
- *Instruments of algebraic geometry*, Bucharest, Romania, September 11–22

Публикации

- [1] The Jordan constant for Cremona group of rank 2, Bull. Korean Math. Soc. 2017 Vol. 54, No. 5, 1859–1871
- [2] *2-подгруппы в группах автоморфизмов вещественных поверхностей дель Пеццо*, принято в Доклады Академии наук.