Отчет по гранту Молодая математика России Журавлевой Виктории Владимировны (за 2017 год)

1 Проведенные исследования

Первая часть проведенных исследований связана с вопросами распределения степеней чисел Пизо и некоторых рекуррентных последовательностей, связанных с числами Пизо.

Напомним, что целое алгебраическое число α называется числом Пизо, если оно само больше 1, а его сопряженные лежат строго внутри единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Особый интерес математиков к этим числам вызван их диофантовыми свойствами, а именно тем, что их степени — это «почти целые» числа в том смысле, что расстояние от α^n до ближайшего целого числа стремится к нулю.

Последовательность действительных чисел $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, называется линейной рекуррентной, если для некоторых $a_1, \dots a_d \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_k x_{n-k} + \dots + a_{d-1} x_{n-d+1} + a_d x_{n-d}. \tag{1}$$

Одной из задач, связанных с использованием рекуррентных последовательностей, является задача о распределении дробных частей $K_n = \{\xi\alpha^n\}$, где $\alpha, \xi \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$, $\xi \neq 0$.

В предыдущих работах автор и А. Дубицкас нашли точное значение для величины $L(\alpha) := \liminf_{n\to\infty} ||\xi\alpha^n||$ (то есть нашли такое максимальное число, что существует такое действительное число ξ, что все предельные точки последовательности дробных частей $\{\xi\alpha^n\}$ лежат на отрезке $[L(\alpha), 1 - L(\alpha)]$) в следующих случаях:

- для многочленов Пизо с положительными коэффициентами (без ограничений на степень);
- для многочленов Пизо со знакопеременными коэффициентами (без ограничений на степень);
- для двух наименьших чисел Пизо.

Каждое доказательство состоит из двух частей:

1. Оценка сверху, доказательство использует факты комбинаторики слов;
2. Оценка снизу, из работы Дубицкаса следует, что необходимо привести пример периодической по модулю 1 последовательности с нужным минимальным элементом.

В предыдущих работах автором были получены периодические последовательности по модулю 1 длины 1, 2, 4 (для произвольных многочленов Пизо), 8, 16 (для частных случаев). В этом отчетном году была продолжена работа над поиском новых примеров периодических последовательностей. В частности, появились новые примеры последовательностей длины 3. Оказалось, что в отличие от предыдущих примеров с длинами 2^n вид последовательности зависит от остатка суммы коэффициентов при делении на 3.

Для оценок сверху для произвольных чисел Пизо степени 3 и 4 автором была произведена классификация чисел Пизо. В частности, было найдены необходимые и достаточные ограничения, накладываемые на коэффициенты многочленов Пизо. Только после проведенной работы оказалось, что Ш. Акияма и Н. Гжини недавно сделали это для произвольной степени. Этот результат сильно упрощает работу с многочленами Пизо степени ≥ 4. Ожидается, что работа над точными оценками для этих многочленов будет завершена в следующем году.

Вторая часть исследований связана с оптимизацией алгоритма нахождения оценки для $L(\alpha)$ для конкретного числа.

Величину $L(\alpha)$ можно посчитать, найдя максимум среди минимальных элементов периодических по модулю 1 последовательностей вида (1). Каждая последовательность вида (1) задается своими d первыми элементами. Определим функцию

$$R_k(X) := \min_{1 \leq i \leq k} ||x_i||. \tag{2}$$

Это кусочно-линейная функция от d переменных. Для нахождения ее максимума достаточно рассмотреть все точки $(x_1, x_2, ..., x_d)$ из единичного d-мерного куба.

Пусть $H \in [0, 1/2]$, а $M_i = \{(x_1, ..., x_d) \in [0, 1]^d : ||x_i|| < H\}$.

Будем последовательно отрезать M_i от единичного куба. Если $H > L(\alpha)$, то на каком-то шаге ничего не останется. Если $H < L(\alpha)$, но достаточно близко к $L(\alpha)$, то на некотором шаге останутся "небольшие" выпуклые множества точек, которым принадлежит искомый максимум. А дальше уже аналитическими методами исследуем оставшиеся множества.

Доказательства всех точных результатов для степеней ≥ 4 на данный момент получены с помощью компьютерных алгоритмов. В частности, автор и А. Дубицкас предложили разные алгоритмы для вычисления $L(\alpha)$ для второго по минимальности числа Пизо. Его многочлен — это $x^4 - x^3 - 1$. Периодическая последовательность, на которой достигается оценка сверху, — $\frac{3}{17}, \frac{10}{17}, \frac{5}{17}, \frac{11}{17}, \frac{7}{17}, \frac{7}{17}, \frac{12}{17}, \frac{6}{17}$. Примерное время выполнения алгоритма на компьютере составляет 90 минут.

Третья часть исследований связана с задачей о неоднородных приближениях, о которой впервые написал А.Я. Хинчин. А именно он доказал, что существует такое положительное число k_1, что для любого действительного α можно выбрать такое число β, что неравенство $x|\alpha x - y + \beta| \geq k_1$ будет выполнено для любых целых чисел x и y, где $x > 0$. Но найденное k_1 не было оптимальным. В дальнейшем, А. Прасад и Г. Гудвин добились некоторых улучшений. И на текущий момент $k_1 \leq \frac{68}{483}$ (Г. Гудвин, 1952). С помощью компьютерного алгоритма мы планируем получить новую оценку в этой задаче.

2 Работы, опубликованные и поданные в печать

- *Периодические последовательности по модулю 1 и числа Пизо.* Матем. заметки, том 101, **4**, 630—634 (2017)
- *Convex envelopes and Pisot numbers* Exper. Math. (submitted)

3 Участие в конференциях и школах

- International workshop "Diophantine Approxomation and Related Fields", York, UK (26—30 June 2017)
- "Vilnius Conference in Combinatorics and Number Theory", Vilnius, Lithuania (17—21 July 2017) — speaker

4 Педагогическая деятельность

На кафедре математики СУНЦ МГУ:

- Алгебра (двугодичный поток (2016–2018), математические классы) — семинары (совместно с Довбышем С.А., Мощевитиным Н.Г., Шкаликовой Н.А., Шавгулидзе Н.Е.)
- Алгебра (двугодичный поток (2017–2019), математические классы) — семинары (совместно с Алексеевым Д.В. и Новиковым В.В.)
- Математический анализ (одногодичный поток (2017–2018), математические классы) — семинары (совместно с Шавгулидзе Н.Е. и Савеловым М.П.)
- Олимпиадная математика (кружок, совместно с Пономаревым А.А. и Трещевым В.Д.)

5 Работа в редколлегиях журналов

С января 2016 года являюсь исполнительным редактором журнала "Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory" (главные редакторы Мощевитин Н.Г. и Райгородский А.М.)