Отчет по гранту Молодая математика России
Журавлевой Виктории Владимировны (за 2018 год)

1 Проведенные исследования за 3 года

Данная заявка целиком была посвящена исследованию приближений действительных чисел степенями чисел Пизо. В частности автор изучала вопрос, как точно могут дроби со знаменателями, которые являются элементами целочисленных последовательностей, ассоциированных с числами Пизо, приближать действительные числа (примером такой последовательности являются числа Фибоначчи).

Напомним, что целое алгебраическое число α называется числом Пизо, если оно само больше 1, а его сопряженные лежат строго внутри единичного круга $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Особый интерес математиков к этим числам вызван их диофантовыми свойствами, а именно тем, что их степени — это «почти целые» числа в том смысле, что расстояние от α^n до ближайшего целого числа стремится к нулю.

Последовательность действительных чисел $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, называется линейной рекуррентной, если для некоторых $a_1, \dots a_d \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \ldots + a_k x_{n-k} + \ldots + a_{d-1} x_{n-d+1} + a_d x_{n-d}. \tag{1}$$

Одной из задач, связанных с использованием рекуррентных последовательностей, является задача о распределении дробных частей $K_n = \{\xi\alpha^n\}$, где $\alpha, \xi \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$, $\xi \neq 0$.

В предыдущих работах автор и А. Дубицкас нашли точное значение для величины $L(\alpha) := \liminf_{n\to\infty} ||\xi\alpha^n||$ (то есть нашли такое максимальное число, что существует такое действительное число ξ, что все предельные точки последовательности дробных частей $\{\xi\alpha^n\}$ лежат на отрезке $[L(\alpha), 1 - L(\alpha)]$) для многочленов Пизо с положительными коэффициентами (без ограничений на степень); для многочленов Пизо со знакопеременными коэффициентами (без ограничений на степень); для двух наименьших чисел Пизо.

Основной целью этого проекта было доказать, что последовательность минимальных значений $L(\alpha)$ (в зависимости от степени числа Пизо) выражается формулой $\frac{2^{2^{n-3}}-1}{2^{2^{n-2}}+1}$. Это верно для чисел Пизо с минимальными многочленами степени не больше, чем 4. Для многочленов большей степени получены оценки. Для оценок снизу понадобился геометрический алгоритм, с помощью которого на компьютере были посчитаны точные значения $L(\alpha)$ для некоторых чисел Пизо. Оценки сверху были получены комбинаторным способом.

Суть работы алгоритма заключается в следующем. В качестве входного параметра задают некоторый $\varepsilon \in (0, 1)$. На каждом шаге берется очередной элемент рекуррентной последовательности, соответствующей выбранному числу Пизо с произвольными начальными данными. И из n-мерного единичного куба удаляют все получившиеся на этом шаге числа, которые находятся от целых чисел на расстоянии, меньшим чем ε (строится выпуклая оболочка по сделанным разрезам). Если через несколько шагов, куб «пропал», то ε был взят слишком большим. Оптимизации данного алгоритма и посвящена статья «Convex envelopes and Pisot numbers», которая будет опубликована в «Exper. Math.»

Каждое посчитанное число – это оценка снизу для величины $L(\alpha)$. К сожалению, мощность компьютера не позволяет подобным образом считать оценки снизу для чисел Пизо с минимальными многочленами больших степеней. Но зато помогает находить новые периодические последовательности по модулю 1. В предыдущих работах автором были получены периодические последовательности по модулю 1 длины 1, 2, 4 (для произвольных многочленов Пизо), 8, 16 (для частных случаев). За период проекта появились новые примеры последовательностей длины 3. Оказалось, что в отличие от предыдущих примеров с длинами 2^n вид последовательности зависит от остатка суммы коэффициентов при делении на 3 («Периодические последовательности по модулю 1 и числа Пизо», Матем. заметки, 2017).

Для оценок сверху для произвольных чисел Пизо степени 3 и 4 автором была произведена классификация чисел Пизо. В частности, было найдены необходимые и достаточные ограничения, накладываемые на коэффициенты многочленов Пизо. Только после проведенной работы оказалось, что Ш. Акияма и Н. Гжини недавно сделали это для произвольной степени. Этот результат сильно упрощает работу с многочленами Пизо степени ≥ 4. Получены новые оценки в частных случаях. На данный момент идет подготовка статьи с этими результатами.

2 Работы, опубликованные и поданные в печать за время проекта

- *Периодические последовательности по модулю 1 и числа Пизо.* Матем. заметки, том 101, **4**, 630—634 (2017)

- *Convex envelopes and Pisot numbers* Exper. Math. (submitted)

3 Участие в конференциях и школах

- International conference "Uniform Distribution Theory", Marseille, France (28 September—6 October 2018)

4 Педагогическая деятельность

Доцент кафедры дискретной математики ФИВТ МФТИ: Основы комбинаторики и теории чисел (семинары, 1 курс, осенний семестр); Теория вероятностей (семинары, 2 курс, осенний семестр).

Ассистент кафедры математики СУНЦ МГУ: Алгебра (двугодичный поток (2017–2019), математические классы) — семинары (совместно с Алексеевым Д.В.

и Новиковым В.В.); Геометрия (одногодичный поток (2018–2019), математические классы) — семинары (совместно с Мощевитиным Н.Г. и Некрасовым В.А.); Математический анализ (двугодичный поток (2018–2020), математические классы) — семинары (совместно с Трещевым В.Д.); Олимпиадная математика (кружок, совместно с Пономаревым А.А. и Тихоновым Ю.В.).

С 2018 года преподаватель математики Лицея «Вторая Школа».

Лауреат Гранта Правительства Москвы в сфере образования по итогам 2017/2018 учебного года.

5 Работа в редколлегиях журналов

С января 2016 года являюсь исполнительным редактором журнала "Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory" (главные редакторы Мощевитин Н.Г. и Райгородский А.М.)