Отчет по гранту
Молодая математика России
за 2018 год
Авилов Артём

1 Введение

Мы продолжаем изучать вопрос классификации конечных подгрупп в трёхмерной группе Кремоны $\mathrm{Cr}_3(\Bbbk)$, где $\Bbbk$ – алгебраически замкнутое поле характеристики нуль. Аналогичный вопрос для поверхностей был полностью решен в знаменитой работе И. Долгачева и В. Исковских [1]. При помощи эквивариантного разрешения особенностей и эквивариантной программы минимальных моделей этот вопрос сводится к исследованию конечных подгрупп $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ в группах автоморфизмов $\Bbbk$-рациональных трёхмерных многообразий X специального вида. А именно, особенности X являются терминальными $G\mathbb{Q}$-факториальными, и либо ранг инвариантной группы Пикара $\mathrm{Pic}(X)^G$ равен 1, либо имеется морфизм $f : X \to Y$ на многообразие меньшей размерности такой, что канонический пучок является относительно антиобильным, а ранг относительной инвариантной группы Пикара $\mathrm{Pic}(X/Y)^G$ равен 1. Мы рассматриваем многообразия первого типа с дополнительным условием: канонический класс делится на 2 в группе Пикара (такие многообразия называются G-многообразиями дель Пеццо). Особый интерес представляют те G-многообразия, которые не перестраиваются эквивариантно в другие G-расслоения Мори, такие многообразия называются G-эквивариантно бирационально жёсткими.

2 Полученные результаты

Ранее мной была доказана теорема, которая гласит, что если трёхмерная кубическая гиперповерхность с действием конечной группы не имеет эквивариантной перестройки в более простое многообразие Фано или расслоение Мори, то оно является одним из двух конкретных многообразий, а также были описаны возможные группы, действующие на этих многообразиях. В этом году было завершено доказательство следующих утверждений:

Теорема 1. *Пусть X –кубика Сегре над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Пусть $G \simeq A_5$ – стандартная подгруппа в группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}(X) \simeq S_6$ (т.е. являющаяся стабилизатором одной из координат). Тогда X является G-бирационально сверхжсткским.*

Предложение 1. *Пусть X задано уравнениями $x_0x_1x_2 - x_3x_4x_5 = \sum_{i=0}^{5} x_i = 0$ в $\mathbb{P}^5_{\mathbb{C}}$. Тогда X является $\mathrm{Aut}(X)$-бирационально сверхжёсткским.*

Таким образом, для полной классификации (сверх)жёстких кубических гиперповерхностей не хватает только понимания (сверх)жесткости многообразия из предыдущего предложения относительно двух подгрупп в группе автоморфизмов индекса 2. В обоих случаях мне удалось доказать, что перестройка может быть связана только с одним конкретным неканоническим центром, но существует ли она так и осталось открытой проблемой.

Поскольку кубика Сегре является важным для приложений многообразием, я изучал её формы над алгебраически незамкнутыми полями (в том числе в положительной характеристике). Удалось доказать следующие утверждения:

Теорема 2. *Форма кубики Сегре над произвольным полем характеристики нуль или $p \geqslant 5$ имеет точку и является кубикой.*

Предложение 2. *Существует ровно 4 вещественные формы кубики Сегре, все они рациональны.*

Теорема 3. *Над любым полем характеристики нуль существует ровно одна форма кубики Сегре, являющаяся G-бирационально жёсткой относительно некоторой группы $G \subset \mathrm{Aut}(X)$. Группа G при этом сопряжена одной из четырёх конкретных подгрупп. Обратное также верно – все такие G-многообразия являются бирационально сверхжёсткими.*

Предположительно, аналогичное утверждение верно и в характеристике $p > 5$, но на текущий момент нигде не прописано существование программы минимальных моделей в нужном контексте (хотя она наверняка работает). Полученные результаты полезны для изучения конечных подгрупп в трёхмерных группах Кремоны, в частности, над полями вещественных чисел или над числовыми полями.

Продолжено изучение двойных накрытий $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в квартике. Ранее была доказана следующая теорема:

Теорема 4. *Пусть X – трёхмерное многообразие дель Пеццо степени 2, имеющее ровно 15 обыкновенных двойных точек. Тогда X является двойным накрытием $\mathbb{P}^3$ с ветвлением в гиперплоском сечении квартики Игусы. Кроме того, X является элементом линейной системы $|\mathcal{L}|$ на многообразия Кобла (т.е. накрытия $\mathbb{P}^4$ с ветвлением в квартике Игусы), где $\mathcal{L}$ – ограничение расслоения $\mathcal{O}(1)$ на взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(2,1,1,1,1,1)$, а группа автоморфизмов X совпадает со стабилизатором X в группе автоморфизмов многообразия Кобла.*

В свете недавней статьи Кузнецова, Пржиялковского и Шрамова доказательство удалось существенно упростить. Кроме того, была доказана следующая теорема:

Теорема 5. *Пусть X – трёхмерное многообразие дель Пеццо степени 2, имеющее ровно 15 обыкновенных двойных точек. Пусть $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ – такая подгруппа, что $\mathrm{rk}\,\mathrm{Pic}^G(X) = 1$ и X является $G\mathbb{Q}$-факториальным. Тогда X является G-бирационально жёстким только в следующем случае: оно имеет уравнение $y^2 - 4\sum\limits_{i=1}^{5} x_i^4 + (\sum\limits_{i=1}^{5} x_i^2)^2 = \sum\limits_{i=1}^{5} x_i = 0$ в $\mathbb{P}(2,1,1,1,1,1)$, а G изоморфно $S_5 \times C_2$, $A_5 \times C_2$ или S_5 (нестандартная подгруппа). Более того, в этом случае X является G-бирационально сверхжёстким.*

Также было показано, что среди многообразий, имеющих 14, 13 или менее 12 особенностей G-бирационально жёстких рациональных многообразий нет. Таким образом, в этой области осталось изучить до конца случай 16 особенностей и самый непонятный случай 12 особенностей.

В случае степени 1 ранее были классифицированы многообразия, имеющие "достаточно большую"группу автоморфизмов, т.е. гипотетически являющиеся эквивариантно бирационально жёсткими. За этот год для некоторых из них я проверил эквивариантную бирациональную жёсткость относительно всей группы автоморфизмов. Остается открытым вопрос, какие из описанных многообразий являются рациональными (в частности, в каких случаях полученные результаты применимы к классификации конечных подгрупп в группе Кремоны). В отчетный период проводилась работа по классификации рациональных многообразий степени 1, аналогичная работе, проделанной в статье [2] для многообразий степени 2.

3 Опубликованные и поданные в печать работы

- A. Avilov, Automorphisms of singular three-dimensional cubic hypersurfaces, European Journal of Mathematics September 2018, Volume 4, Issue 3, pp 761–777
- А. Авилов, Бирегулярная и бирациональная геометрия двойных пространств с 15 обыкновенными двойными точками, принята к печати в Известиях РАН
- А. Авилов, Геометрия форм кубики Сегре, будет подана в журнал в ближайший месяц
- A. Avilov, G-birational rigidity of del Pezzo threefolds, in "Subgroups of Cremona groups report No. 28/2018, Oberwolfach, 9–11 (2018), тезис доклада

4 Участие в конференциях и школах

- Конференция Subgroups of Cremona groups, Обервольфах, 17–23 июня 2018, доклад G-birational rigidity of del Pezzo threefolds
- Конференция Young perspectives in algebraic geometry, Байройт, 7–9 марта 2018
- Школа-конференция Varieties and group actions, Варшава, 24–29 сентября 2018

5 Педагогическая деятельность

Преподаю в 57 школе. Также в весеннем семестре был ассистентом на курсе алгебры в НМУ.

Список литературы

[1] I. Dolgachev, V. Iskovskikh, Finite subgroups of the plane Cremona group, In Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I, Progr. Math., 269 (2009), 443–548.

[2] I. Cheltsov, V. Przyjalkowski, C. Shramov, Which quartic double solids are rational? ArXiv e-print 1508.07277, accepted to J. of Alg. Geom.