Отчёт Авилова Артёма Алексеевича по гранту "молодая математика России"за 2019 год.

Результаты, полученные в 2019 году.

Я продолжил изучать вопрос классификации конечных подгрупп в трёхмерной группе Кремоны $\mathrm{Cr}_3(\Bbbk)$, где $\Bbbk$ – алгебраически замкнутое поле характеристики нуль. Аналогичный вопрос для поверхностей был полностью решен в знаменитой работе И. Долгачева и В. Исковских [4]. При помощи эквивариантного разрешения особенностей и эквивариантной программы минимальных моделей этот вопрос сводится к исследованию конечных подгрупп $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ в группах автоморфизмов $\Bbbk$-рациональных трёхмерных многообразий X специального вида. А именно, особенности X являются терминальными $G\mathbb{Q}$-факториальными, и либо ранг инвариантной группы Пикара $\mathrm{Pic}(X)^G$ равен 1, либо имеется морфизм $f : X \to Y$ на многообразие меньшей размерности такой, что канонический пучок является относительно антиобильным, а ранг относительной инвариантной группы Пикара $\mathrm{Pic}(X/Y)^G$ равен 1. Я рассматривал многообразия первого типа с дополнительным условием: канонический класс делится на 2 в группе Пикара (такие многообразия называются G-многообразиями дель Пеццо). Особый интерес представляют те G-многообразия, которые не перестраиваются эквивариантно в другие G-расслоения Мори, такие многообразия называются G-эквивариантно бирационально жёсткими. В предыдущих работах (см.[2], [3]) я классифицировал эквивариантно бирационально жёсткие многообразия дель Пеццо степеней 3 и 4. В случае степени 4 оказалось, что G- бирационально жёсткими могут быть только 5 отдельных многообразий и одно однопараметрическое семейство. В случае степени 3 классификация устроена ещё проще – только два многообразия являются бирационально жёсткими относительно всей группы автоморфизмов. Для одного из них были классифицированы все подгруппы полной группы автоморфизмов, относительно которых многообразие является эквивариантно бирационально жёстким.

В отчетный период продолжалось исследование многообразий дель Пеццо степеней 2 и 1, имеющих только нодальные особенности. Поскольку для приложений к изучению группы Кремоны меня интересуют только рациональные многообразия, то, согласно результату Чельцова, Шрамова и Пржиялковского (см. [5]), имеет смысл изучать только многообразия, имеющие более 6 особенностей. Ранее были изучены многообразия, имеющие число особенностей, которое больше 6, и при этом не равно 12 и 16. Оказалось, что бирационально жёстких многообразий такого типа очень мало. В случае 15 особенностей в этом году была опубликована соответствующая статья, см. [1]. В этом году было продолжено изучение оставшихся случаев 12 и 16 особенностей. Оказалось, что группы автоморфизмов в этих случаях могут быть довольно большими, и в некоторых случаях удалось показать, что у линейных систем определённого вида нет неканонических центров и, следовательно, линков Саркисова. Однако для меньших групп автоморфизмов ситуация существенно сложнее, и в этих случаях имеются только некоторые частные результаты.

В случае степени 1 группа автоморфизмов многообразия Фано каноническим образом вкладывается в группу автоморфизмов проективной плоскости. Имеется гипотеза, что в этом случае многообразие Фано является G-бирационально жёстким в том и только том случае, если на проективной плоскости нет неподвижных точек относительно этого действия группы. В одну сторону эта гипотеза очевидна. Недавно эта гипотеза была проверена Ахмадинежадом, Чельцовым, Паком и Шрамовым в случае многообразий с максимально возможным количеством особенностей (см. [6]). В этом году мной проводилась работа по проверке этой гипотезы в общем случае. В прошлом году мной были описаны возможные группы автоморфизмов и уравнения соответствующих многообразий. Для некоторых из них (в случае большой группы автоморфизмов) удалось описать теоретически возможные неканонические центры линейных систем и показать, что перестройки, связанные с этими центрами, не дают линков Саркисова. В некоторых из оставшихся случаев удалось исключить некоторые возможности для неканонических центров и, соответственно, линков Саркисова, но, к сожалению, не для всех.

Кроме того, ранее мной была проверена эквивариантная бирациональная жёсткость кубики Сегре. В этом году удалось проверить эквивариантную бирациональную жёсткость последней оставшейся трёхмерной кубики, таким образом, эквивариантная бирациональная жёсткость всех рациональных кубических трёхмерных многообразий полностью изучена.

Опубликованные и поданные в печать в 2019 году работы.

- А. А. Авилов, “Бирегулярная и бирациональная геометрия двойных накрытий проективного пространства с ветвлением в квартике с 15 обыкновенными двойными точками”, Изв. РАН. Сер. матем., 83:3 (2019), 5–14; Izv. Math., 83:3 (2019), 415–423
- А. А. Авилов, "О формах кубики Сегре принята к печати в журнале "Математические Заметки"к январском номере.

Участие в конференциях и школах.

Доклад на конференции "Кафедре высшей алгебры – 90 лет".

Работа в научных центрах и международных группах.

Работал в лаборатории алгебраической геометрии и её приложений.

Педагогическая деятельность.

В 2019 году я вел матанализ в 57 школе. С сентября я ещё работаю в Высшей Школе Экономики доцентом на четверть ставки и веду курс "дополнительные главы математики"у математического направления в лицее ВШЭ.

Итоги трёх лет.

К сожалению, я совсем неправильно оценил масштаб работ, которые пришлось проводить. За эти три года мне удалось полностью завершить исследование эквивариантной бирациональной жёсткости рациональных кубических трёхмерных многообразий, описать всё эквивариантно бирационально жёсткие нодальные рациональные многообразия дель Пеццо степени 2, за исключением многообразий с 16 или 12 особенностями, в этих случаях мне удалось только классифицировать кандидатов в бирационально жёсткие многообразия, которые не допускают "простых"перестроек в расслоения Мори или более простые многообразия Фано, а также в большинстве случаев удалось классифицировать возможные неканонические центры, но проверка соответствующих линков Саркисова в некоторых случаях провести не удалось. Также удалось классифицировать все многообразия дель Пеццо степени 1, которые не имеют перестройки в расслоение Мори и, согласно гипотезе Чельцова, являются эквивариантно бирационально жёсткими. В некоторых случаях изучены потенциальные неканонические центры линейных систем, и в некоторых редких случаях связанные с ними линки Саркисова. По ходу исследования удалось также получить некоторые интересные результаты относительно форм кубики Сегре над незамкнутыми полями, что относится к теме исследования, но не планировалось в заявке. Таким образом, только частично выполнена только программа первого года, а к планируемым исследованиям второго и третьего года я перейти не успел.

За эти три года по теме проекта опубликовано 4 статьи и 1 большая статья сейчас в процессе написания.

Список литературы

[1] А. Авилов Бирегулярная и бирациональная геометрия двойных квартик с 15 обыкновенными двойными точками, Изв. РАН: серия мат. 83:3 (2019), 5—14

[2] А. Авилов, Автоморфизмы трехмерных многообразий, представимых в виде пересечения двух квадрик, Матем. сб. 2016, 207:3, 3–18.

[3] А. Авилов, Автоморфизмы особых трехмерных кубических гиперповерхностей и группа Кремоны, Матем. заметки 2016, 100:3, 461–464.

[4] I. Dolgachev, V. Iskovskikh, Finite subgroups of the plane Cremona group, In Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I, Progr. Math., 269 (2009), 443–548.

[5] I. Cheltsov, V. Przyjalkowski, C. Shramov, Which quartic double solids are rational? J. of Alg. Geom. 2019, 28, 201–243

[6] H. Ahmadinezhad, I. Cheltsov, J. Park, C. Shramov, Double Veronese cones with 28 nodes ArXiv e-print 1910.10533.