Отчёт по гранту
«Молодая математика России»
за 2017 год
Елена Бунькова

1. Результаты, полученные в этом году

1.1. Теория сигма-функций. Приложения к уравнениям математической физики. Задача дифференцирования абелевых функций по параметрам поставлена в [1]. Она является обобщением на гиперэллиптический случай классического результата Ф.Г. Фробениуса и Л. Штикельбергера [2], построивших образующие алгебры Ли дифференцирований абелевых функций рода $g = 1$:

$$\mathcal{L}_0 = 4g_2\partial_{g_2} + 6g_3\partial_{g_3} - u\partial_u, \qquad \mathcal{L}_1 = \partial_u, \qquad \mathcal{L}_2 = 6g_3\partial_{g_2} + \frac{1}{3}g_2^2\partial_{g_3} - \zeta(u; g_2, g_3)\partial_u.$$

Согласно теореме Дубровина–Новикова [3], пространство универсального расслоения якобианов гиперэллиптических кривых бирационально эквивалентно комплексному линейному пространству $\mathbb{C}^{3g}$. В [4] построено отображение $\mathbb{C}^{3g} \to \mathbb{C}^{2g} \supset \mathcal{B}$ на пространство параметров $\mathcal{B}$ гиперэллиптических кривых. Переформулируем эту задачу следующим образом:

Задача. Построить полиномиальную алгебру Ли векторных полей на пространстве $\mathbb{C}^{3g}$, такую что векторные поля спускаются на $\mathcal{B}$ и задают базис в каждой точке $\mathcal{B}$.

В работе “Differentiation of genus 3 hyperelliptic functions” эта задача полностью решена в случае $g = 3$. Результат представлен как в форме полиномиальных векторных полей (как в работе [5] для рода $g = 2$), так и в виде дифференцирований поля абелевых функций (как в работе [2] для рода $g = 1$). Таким образом, построена полиномиальная алгебра Ли дифференцирований гиперэллиптических функций рода 3.

Для получения результата в случае $g = 3$ были подробно изучены случаи $g = 2$ и $g = 1$, описаны общие свойства этих решений. Данные результаты планируется использовать для решения поставленной задачи в случае $g = 4$ и далее.

Препринт “Weierstrass Sigma Function Coefficients Divisibility Hypothesis” касается гипотезы о делимости коэффициентов $a_{i,j}$ разложения в ряд сигма-функции Вейерштрасса

$$\sigma(z) = z\sum_{i,j\geqslant 0} \frac{a_{i,j}}{(4i+6j+1)!}\left(\frac{g_2z^4}{2}\right)^i \left(2g_3z^6\right)^j.$$

Эта задача отностися к роду $g = 1$. Опираясь на работу [6] показано, что $a_{i,j} \in \mathbb{Z}$. Гипотеза о делимости состоит в следующем утверждении:

$$\nu_2(a_{i,j}) = \nu_2((4i+6j+1)!) - \nu_2(i!) - \nu_2(j!) - 3i - 4j,$$
$$\nu_3(a_{i,j}) = \nu_3((4i+6j+1)!) - \nu_3(i!) - \nu_3(j!) - i - j.$$

Если она верна, то сигма-функция Вейерштрасса $\sigma(z)$ является рядом Гурвица над кольцом $\mathbb{Z}[\frac{g_2}{2}, 6g_3]$. Представляет интерес приложение этого результата к родам Хирцебруха, заданным выражениями, зависящими от сигма–функции Вейерштрасса.

1.2. **Формальные группы и роды Хирцебруха.** В задаче изучения родов Хирцебруха уровня n проведены исследования решений функционального уравнения Хирцебруха [7]

$$\sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} \frac{1}{f(x_j - x_i)} = c. \tag{1}$$

Здесь n — целое число больше 1, а c — константа. Решение $f(x)$ ищут в классе мероморфных функций с начальными условиями $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$. Уравнение (1) представляет собой условие $\mathbb{C}P(n-1)$-мультипликативности [7] рода Хирцебруха, заданного функцией $f(x)$.

Продолжается работа над исследованием общих решений этого уравнения для каждого $n > 4$. В случаях $n = 2, 3, 4$ общие решения известны. Для произвольного $n > 1$ известны две серии двухпараметрических решений. Для $n = 2, 3, 4$ ими всё и исчерпывается.

2. Научные работы за год

- Elena Yu. Bunkova, "Differentiation of genus 3 hyperelliptic functions", European Journal of Mathematics, 2017, 1–20 (принята в печать и опубликована онлайн, печатная версия выйдет в 2018 году), arXiv: 1703.03947 https://link.springer.com/epdf/10.1007/s40879-017-0173-1
- Elena Yu. Bunkova, "Weierstrass Sigma Function Coefficients Divisibility Hypothesis", 2017, arXiv: 1701.00848

3. Участие в семинарах и конференциях

- Доклад "Differentiation of Hyperelliptic Functions: Genus 3 Case", International Conference Dynamics in Siberia, Новосибирск, 27 февраля 2017.
- Доклад "Дифференцирование гиперэллиптических функций рода 3 по параметрам", семинар «Римановы поверхности, алгебры Ли и математическая физика», Москва, 31 марта 2017.
- Доклад "Differentiation of genus 3 hyperelliptic functions", Workshop Birkar's boundedness and Cremona groups, Эдинбург, Великобритания, 30 июня 2017.
- Постерный доклад с презентацией "Explicit Differentiation of Genus 3 Hyperelliptic Functions", School and conference on geometry and quantization, Университет Орхуса, Орхус, Дания, 3 августа 2017.

Также приняла участие в качестве слушателя в международной конференции "Simons conference in mathematics and physical sciences: birational geometry", Нью Йорк, США, 21-25 августа 2017.

4. Работа в научных центрах и международных группах

С 10 по 17 февраля 2017 года посетила Великобританию, город Лидс, по приглашению А. Михайлова для совместной работы по теме "Алгебры Ли".

5. Педагогическая деятельность

Выступила с докладами "Эллиптические кривые" на школе-конференции "Агебра и теория чисел в Калининграде" в БФУ им. И. Канта. Школа была расчитана на студентов и проходила в Калининграде, Россия, с 17 по 21 апреля 2017.

Список литературы

[1] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, "Решение задачи дифференцирования абелевых функций по параметрам для семейств (n,s)-кривых", Функц. анализ и его прил., 42:4, 2008, 24–36.

[2] F. G. Frobenius, L. Stickelberger, *Über die Differentiation der elliptischen Functionen nach den Perioden und Invarianten*, J. Reine Angew. Math., 92 (1882), 311–337.

[3] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, "Периодическая задача для уравнений Кортевега–де Фриза и Штурма–Лиувилля. Их связь с алгебраической геометрией", ДАН СССР, 219:3, 1974, 531–534.

[4] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leikin, "Kleinian functions, hyperelliptic Jacobians and applications", Reviews in Mathematics and Math. Physics, **10**, 1997, part 2, Gordon and Breach, London, 3–120.

[5] В. М. Бухштабер, "Полиномиальные динамические системы и уравнение Кортевега–де Фриза", Современные проблемы математики, механики и математической физики. II, Сборник статей, Тр. МИАН, 294, МАИК, М., 2016.

[6] Y. Ônishi, *Hurwitz integrality of power series expansion of the sigma function for a plane curve*, arXiv:1510.03002

[7] F. Hirzebruch, T. Berger, R. Jung, *Manifolds and modular forms*, Aspects Math., E20, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1992.