Отчет по гранту
Молодая математика России
за 2017 год
Дмитрий Гайфулин

1 Полученные результаты

Проведенные исследования касаются свойств спектра Лагранжа и достижимых чисел. Иррациональное число α называется *достижимым*, если неравенство
$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \leq \frac{1}{\mu(\alpha)q^2} \tag{1}$$
имеет бесконечно много решений для целых p и q. Через $\mu(\alpha)$ мы обозначаем постоянную Лагранжа, определяемую равенством
$$\mu(\alpha) = (\liminf_{q\to\infty} q\|q\alpha\|)^{-1}. \tag{2}$$

Назовем элемент спектра Лагранжа a *допустимым*, если существует такое достижимое иррациональное число α, что выполнено равенство $\mu(\alpha) = a$. В 2016 году удалось построить пример элемента спектра Лагранжа, не являющегося допустимым. Кроме того, было показано, что все такие элементы являются левыми концами пропусков в спектре Лагранжа. В связи с этим возник вопрос, конечно или бесконечно число недопустимых левых концов пропусков в спектре Лагранжа, а также можно ли дать их полное описание. Ответ на второй вопрос дает следующая теорема

Теорема 1. *Пусть a - левый конец пропуска в спектре Лагранжа. Тогда число a является допустимым тогда и только тогда, когда существует квадратичная иррациональность α такая, что $\mu(\alpha) = a$.*

Теорема 1 дает инструмент для проверки допустимости иррационального числа. В частности, с ее помощью удается построить счетное семейство недопустимых пропусков в спектре Лагранжа

Теорема 2. *Число*

$$\alpha_n^* = 2 + [0; \underbrace{1, \ldots, 1}_{2n-2}, \overline{2, 2, 1, 2}] + [0; \underbrace{1, \ldots, 1}_{2n-1}, 2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{2n-2}, \overline{2, 2, 1, 2}]$$

при $n \geq 1$ является левым концом пропуска в спектре Лагранжа. При этом α_n^* не является допустимым при $n \geq 2$.

Ключевым соображением, позволившим получить теоремы 1 и 2 является введение понятия *ассоциированной последовательности* для данного числа $\alpha = [a_0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$. Мы назовем бесконечную в обе стороны последовательность $B = (\ldots, b_{-n}, \ldots, b_0, \ldots, b_n, \ldots)$ ассоциированной с α, если для любого k отрезок $(b_{-k}, \ldots, b_0, \ldots, b_k)$ встречается в последовательности неполных частных α бесконечно много раз. Если при этом

$$[b_0; b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots] + [0; b_{-1}, b_{-2}, \ldots, b_{-n}, \ldots] = \mu(\alpha),$$

то мы назовем последовательность B *сильно ассоциированной* с α. Пользуясь результатами работы 2016 года удалось показать, что

Утверждение 1. *Если a - левый конец пропуска в спектре Лагранжа и $\mu(\alpha) = a$, то любая сильно ассоциированная с α последовательность имеет (возможно, несовпадающие) периоды справа и слева.*

В свою очередь, теорема 2 очевидным образом выводится из теоремы 1 и следующего утверждения

Утверждение 2. *Пусть $\mu(\alpha) = \alpha_n^*$. Тогда единственная сильно ассоциированная с α последовательность есть*

$$(\overline{P}) = (\overline{2, 1, 2, 2}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{2n}, 2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{2n+1}, 2, \underbrace{1, \ldots, 1}_{2n}, \overline{2, 2, 1, 2}).$$

2 Опубликованные и поданные в печать работы

- Dmitry Gayfulin, Attainable numbers and the Lagrange spectrum, Acta Arithmetica 179 (2017), 185-199.
- Dmitry Gayfulin, Admissible endpoints of gaps in the Lagrange spectrum, подана в журнал Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory, получена положительная рецензия, препринт доступен по адресу https://arxiv.org/abs/1704.08060.

3 Участие в конференциях и школах

- Mini-conference "Diophantine problems"in occasion of Prof. Nikolay Moshchevitin's 50 birthday, Долгопрудный, Россия, 24-25 апреля 2017.
- XXXèmes Journées Arithmétiques, Кан, Франция, 3-7 июля 2017
- Vilnius Conference in Combinatorics and Number Theory, Вильнюс, Литва, 16-22 июля 2017

4 Педагогическая деятельность

В осеннем семестре 2017 года - прием задач на семинарах по курсу "Алгебра-1" в НМУ.