Отчет по гранту
Молодая математика России
за 2018 год
Дмитрий Гайфулин

1 Полученные результаты

Мои исследования в 2018 году были посвящены свойствам функции Минковского $?(x)$. Напомним, что если иррациональное число $x \in [0,1]$ представляется в виде цепной дроби $[0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$, то значение функции Минковского в данной точке равно

$$?(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{a_1+\ldots+a_k-1}}.$$

Если x - рациональное число, то сумма выше заменяется на конечную.

Ниже подробно перечислены полученные в 2018 году результаты. Работа о диофантовых свойствах фиксированных точек функции Минковского была выполнена совместно с Н.А. Шульгой. Исследования производной функции Минковского велись совместно с И.Д. Каном. Результаты, перечисленные ниже, относятся к моему вкладу в данных исследованиях, если не оговорено иное.

1.1 Диофантовы свойства фиксированных точек функции Минковского

Фиксированными точками функции Минковского называются корни уравнения $?(x) = x$. У этого уравнения есть три тривиальных корня - 0, $\frac{1}{2}$ и 1. Из геометрических соображений (производная в точке $\frac{1}{2}$ равна 0) легко видеть, что есть еще как минимум две нетривиальных фиксированных точки. Нетрудно показать, что все они иррациональны. Известная гипотеза утверждает, что уравнение $?(x) = x$ имеет ровно пять корней. Из свойства симметрии $1-?(x) = ?(1-x)$ следует, что достаточно изучить фиксированные точки только на интервале $(0, \frac{1}{2})$. Доказанная ниже теорема верна для наибольшего или наименьшего корня на интервале $(0, \frac{1}{2})$.

В случае, если гипотеза верна, теорема выполняется для единственной фиксированной точки интервала.

Теорема 1. *Обозначим* $\kappa_1 = 2\log_2(\frac{\sqrt{5}+1}{2}) \approx 1.38848383\ldots$. *Пусть* $x = [0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$ *- наибольшая или наименьшая фиксированная точка* $?(x)$ *на интервале* $(0, \frac{1}{2})$. *Тогда неравенство*

$$a_{n+1} < (\kappa_1 - 1)\sum_{i=1}^{n} a_i + 2\log_2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \tag{1}$$

выполнено для всех $n \geq 1$.

Из теоремы 1 следует, что все такие x имеют меру иррациональности 2. Более точная оценка выглядит следующим образом:

Теорема 2. *Пусть* x *- фиксированная точка, определённая в Теореме 1, тогда для всех целочисленных* p *и* q *выполнено неравенство*

$$\left|x - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{\left(\frac{2(\kappa_1 - 1)}{\log 2}\log q + O(\log\log q)\right)q^2}.$$

Кроме того, удалось доказать следующее любопытное утверждение:

Теорема 3. *Если для любого рационального* $\frac{p}{q}$ *на интервале* $(0, 1)$, $q > 2$ *выполнено неравенство*

$$\left|?\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{2q^2}, \tag{2}$$

то уравнение $?(x) = x$ *имеет ровно 5 корней.*

Оно интересно тем, что связывает гипотезу об иррациональных корнях уравнения $?(x) = x$ со свойствами значения функции Минковского в рациональных точках. Отметим также, что неравенство (2) означает, что никакое рациональное число не может быть подходящей дробью для своего значения функции Минковского.

1.2 Свойства производной функции Минковского

Как нетрудно показать, производная функции Минковского может принимать только 2 значения - 0 и $+\infty$. Пусть все неполные частные цепной дроби не превосходят n. Введем следующие константы: $\mu_n = \frac{n+2+\sqrt{n^2+4n}}{2}$, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и

$$\kappa_1^n = \frac{(n+1)\log\varphi - \log\mu_n}{2\log\varphi + (n-1)\log\sqrt{2} - \log\mu_n}.$$

Обозначим $S_t(x) = a_1 + \ldots + a_t$. А. Душистова, И. Кан и Н. Мощевитин в 2013[1] году показали, что

Теорема 4.
(i)Пусть[2] $n \geq 5$. *Если существует константа* C *такая, что* $S_t(x) < \kappa_1^n t + C$, *то производная в точке* x *существует и равна* $+\infty$.
(ii)Для любой функции $\psi(t)$ *такой, что* $\lim\limits_{t\to\infty}\psi(t) = +\infty$ *существует* x *такое, что* $S_t(x) < \kappa_1^n t + \psi(t)$, *и производная в точке* x *не определена.*

Из доказанной теоремы возникает задача - пусть производная функции Минковского в точке x существует и равна 0. Как близки могут быть функции $S_t(x)$ и $\kappa_1^n t$? В той же статье было показано, что если $?'(x) = 0$, то для любого достаточно большого t выполнено

$$\max_{i\leq t} S_i(x) - \kappa_1^n i > C_1\frac{\sqrt{t}}{n^{10}}, \tag{3}$$

а также построен пример числа, для которого $?'(x) = 0$, и для всех достаточно больших t

$$\max_{i\leq t} S_i(x) - \kappa_1^n i < C_2 n\sqrt{t}. \tag{4}$$

В дальнейшем, И. Кану удалось улучшить зависимость от n в (3) до $n^{-2.5}$, а в (4) - до $n^{\frac{2}{3}}$. В этом году нам удалось получить точный ответ в данной задаче: И. Кан показал, что

$$\max_{i\leq t} S_i(x) - \kappa_1^n i > \frac{1}{3}\sqrt{t}. \tag{5}$$

Мне, в свою очередь, удалось доказать следующую теорему:

[1] Dushistova A. A., Kan I. D., Moshchevitin N. G. Differentiability of the Minkowski question mark function. J. Math. Anal. Appl. 401, No. 2, 774-794 (2013).

[2] Если все неполные частные x не превосходят 4, можно показать, что $?'(x) = +\infty$. Поэтому этот случай, нам неинтересен, в дальнейшем мы везде полагаем $n \geq 5$.

Теорема 5. *Существует иррациональное число* $x = [0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$, *все неполные частные которого не превосходят* n, *такое, что* $?'(x) = 0$. *При этом, для любого достаточно большого* t *выполнено*

$$\max_{i \le t} S_i(x) - \kappa_1^n i < 21\sqrt{t}. \tag{6}$$

Совместная статья с изложением этого результата будет подана до конца декабря.

Аналогичная задача возникает и в общем случае, когда неполные частные x неограничены. В этом случае верна теорема, аналогичная Теореме 4, с заменой константы κ_1^n на κ_1, которая была определена выше в формулировке Теоремы 1. Наилучшая оценка в данной задаче принадлежала И. Кану. Если $?'(x) = 0$, то при всех достаточно больших t

$$\max_{i \le t} S_i(x) - \kappa_1 i > \sqrt{\frac{\kappa_1 - 1}{\log 2}} \sqrt{t \log t} \left(1 + o\left(t^{-\frac{\log \log t}{\log t}}\right)\right).$$

Мне удалось получить следующее усиление данной оценки

$$\max_{i \le t} S_i(x) - \kappa_1 i > 1.1 \sqrt{\frac{\kappa_1 - 1}{\log 2}} \sqrt{t \log t}.$$

Отметим, что существует число x такое, что $?'(x) = 0$, и для любого достаточно большого t выполнено

$$\max_{i \le t} S_i(x) - \kappa_1 i \le 2\sqrt{2} \sqrt{\frac{\kappa_1 - 1}{\log 2}} \sqrt{t \log t} \left(1 + O\left(\frac{\log \log t}{\log t}\right)\right).$$

Поэтому зазор между оценкой и примером сохраняется, и результат нельзя назвать окончательным.

2 Опубликованные и поданные в печать работы

- Dmitry Gayfulin, *Admissible endpoints of gaps in the Lagrange spectrum*, Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory, Vol. 8 (2019), No. 1, 47–56.

- Dmitry Gayfulin, Nikita Shulga, *Diophantine properties of fixed points of Minkowski question mark function*, подана в Acta Arithmetica, препринт доступен по адресу https://arxiv.org/abs/1811.10139.

3 Участие в конференциях и школах

- Canadian Number Theory Association - XV, Université Laval, Квебек, Канада, 9-13 июля 2018.

- 6th International Conference on Uniform Distribution Theory, CIRM, Марсель, Франция, 1-5 октября 2018.

  Кроме того, 17-30 ноября 2018 по приглашению проф. Виктора Бересневича я был в университете Йорка (Великобритания), где делал доклад о диофантовых свойствах фиксированных точек функции Минковского.

4 Педагогическая деятельность

Начиная с осеннего семестра 2018 года я преподаю в 57-й школе.