Отчет по гранту
Молодая математика России
за 2019 год
Дмитрий Гайфулин

1 Полученные результаты

Мои исследования в 2019 году стали продолжением исследований 2018 года и были посвящены свойствам функции Минковского $?(x)$. Напомним, что если иррациональное число $x \in [0,1]$ представляется в виде цепной дроби $[0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$, то значение функции Минковского в данной точке равно

$$?(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2^{a_1+\ldots+a_k-1}}.$$

Если x - рациональное число, то сумма выше заменяется на конечную.

Данные исследования велись совместно с И.Д. Каном. Вклад в результаты, перечисленные ниже, можно разделить следующим образом. Все верхние оценки (или примеры) ниже были построены мной. Нижние оценки являются результатом совместных исследований, здесь мы несколько раз улучшали конструкции друг друга.

1.1 Свойства производной функции Минковского - случай, когда производная равна 0.

Как нетрудно показать, производная функции Минковского может принимать только 2 значения - 0 и $+\infty$. Пусть все неполные частные цепной дроби не превосходят n. Введем следующие константы: $\mu_n = \frac{n+2+\sqrt{n^2+4n}}{2}$, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ и

$$\kappa_1^n = \frac{(n+1)\log\varphi - \log\mu_n}{2\log\varphi + (n-1)\log\sqrt{2} - \log\mu_n}.$$

Обозначим $S_t(x) = a_1 + \ldots + a_t$. А. Душистова, И. Кан и Н. Мощевитин в 2013[1] году показали, что

[1]Dushistova A. A., Kan I. D., Moshchevitin N. G. Differentiability of the Minkowski question mark function. J. Math. Anal. Appl. 401, No. 2, 774-794 (2013).

Теорема 1.
(i)Пусть[2] $n \geq 5$. *Если существует константа* C *такая, что* $S_t(x) < \kappa_1^n t + C$, *то производная в точке* x *существует и равна* $+\infty$.
(ii)Для любой функции $\psi(t)$ *такой, что* $\lim\limits_{t\to\infty} \psi(t) = +\infty$ *существует* x *такое, что* $S_t(x) < \kappa_1^n t + \psi(t)$, *и производная в точке* x *не определена.*

Из доказанной теоремы возникает задача - пусть производная функции Минковского в точке x существует и равна 0. Как близки могут быть функции $S_t(x)$ и $\kappa_1^n t$? К этой задаче можно подойти с двух сторон. С одной стороны, можно оценивать разность $\max\limits_{i\leq t}\big(S_i(x) - \kappa_1^n i\big)$ снизу при условии разности производной нулю. С другой стороны, можно улучшать оценку снизу для примера.

В прошлом году нам удалось доказать две теоремы:

Теорема 2 (оценка). *Пусть производная* $?(x)$ *существует и равна нулю. Пусть все неполные частные разложения* x *в цепную дробь ограничены сверху константой* n. *Тогда выполнено следующее неравенство:*

$$\max_{i\leq t}\Bigg(S_i(x) - \kappa_1^n i\Bigg) > \frac{1}{3}\sqrt{t}. \tag{1}$$

Теорема 3 (пример). *Существует иррациональное число* $x = [0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$, *все неполные частные которого не превосходят* n, *такое, что* $?'(x) = 0$. *При этом, для любого достаточно большого* t *выполнено*

$$\max_{i\leq t}\Bigg(S_i(x) - \kappa_1^n i\Bigg) < 21\sqrt{t}. \tag{2}$$

Применив ряд новых идей и оптимизировав конструкции, удалось получить следующие усиления как для оценки, так и для примера.

Теорема 4. *В условиях предыдущих теорем выполнены следующие неравенства:*

$$\max_{i\leq t}\Bigg(S_i(x) - \kappa_1^n i\Bigg) > 0.4628\sqrt{t}. \tag{3}$$

$$\max_{i\leq t}\Bigg(S_i(x) - \kappa_1^n i\Bigg) < 7\sqrt{t}. \tag{4}$$

[2]Если все неполные частные x не превосходят 4, можно показать, что $?'(x) = +\infty$. Поэтому этот случай, нам неинтересен, в дальнейшем мы везде полагаем $n \geq 5$.

При этом, для достаточно больших n оценку (4) можно заменить на

$$\max_{i\le t}\left(S_i(x)-\kappa_1^n i\right)<4.78\sqrt{t}. \qquad (5)$$

1.2 Свойства производной функции Минковского - случай, когда производная равна $+\infty$.

Существует теорема, аналогичная теореме (1) для случая, когда сумма неполных частных, наоборот, растёт быстро. Для каждого натурального числа n положим

$$\lambda_n=0.5\left(n+\sqrt{n^2+4}\right), \qquad \kappa_2=\frac{4\log\lambda_5-5\log\lambda_4}{\log\lambda_5-\log\lambda_4-\log\sqrt{2}}\approx 4.401.$$

В вышеупомянутой статье А. Душистовой, И. Кана и Н. Мощевитина было доказано, что

Теорема 5. *Пусть для иррационального x существует действительная константа C, такая что для всех натуральных t имеет место неравенство*

$$S^{(x)}(t)\ge\kappa_2 t-C. \qquad (6)$$

Тогда производная $?'(x)$ существует и выполнено равенство $?'(x)=0$.

Теорема 6. *(i) Пусть производная $?'(x)$ для иррационального x существует и выполнено равенство $?'(x)=+\infty$. Тогда для любого достаточно большого t выполнено неравенство.*

$$\max_{u\le t}\left(\kappa_2 u-S^{(x)}(u)\right)\ge 10^{-8}\sqrt{t}. \qquad (7)$$

(ii) Существует иррациональное $x\in(0,1)$, такое что $?'(x)=+\infty$ и для всех достаточно больших t выполнено неравенство

$$\max_{u\le t}\left(\kappa_2 t-S^{(x)}(t)\right)\le 200\sqrt{t}. \qquad (8)$$

Нам удалось значительно сблизить эти оценки и доказать следующую теорему.

Теорема 7. *(i) Пусть производная $?'(x)$ для иррационального x существует и выполнено равенство $?'(x) = +\infty$. Тогда для любого достаточно большого t выполнено неравенство*

$$\max_{u\le t}\Big(\kappa_2 u - S^{(x)}(u)\Big) \ge 0.0622\sqrt{t}. \tag{9}$$

(ii) Существует иррациональное $x \in (0,1)$, такое что $?'(x) = +\infty$ и для всех достаточно больших t выполнено неравенство

$$\max_{u\le t}\Big(\kappa_2 t - S^{(x)}(t)\Big) \le 0.26489\sqrt{t}. \tag{10}$$

Заметим, что для данной задачи рассмотрение случая ограниченных неполных частных не имеет смысла, поскольку несложно показать, что ответ в этом случае будет тот же самый.

2 Опубликованные и поданные в печать работы

- Dmitry Gayfulin, Nikita Shulga, *Diophantine properties of fixed points of Minkowski question mark function.*
  Эта работа была подана в 2018 году, сейчас она успешно прошла рецензирование в Acta Arithmetica и готовится к печати.

- Д. Гайфулин, И. Кан. *Дифференцируемость функции Минковского* $?(x)$. *IV.*

- Д. Гайфулин, И. Кан. *Дифференцируемость функции Минковского* $?(x)$. *V.*

  Последние две работы были поданы в журнал "Известия РАН. Серия математическая" и сейчас находятся на рецензии. Первая статья посвящена случаю, когда производная равна 0, вторая - когда производная равна $+\infty$.

3 Участие в конференциях и школах

- Transcendence and Diophantine Problems, Москва, 10-14 июня 2019.
- Journées Arithmétiques XXXI, Стамбул, Турция, 1-5 июля 2019.

4 Педагогическая деятельность

Весь 2019 год я преподаю математику в 57-й школе.

5 Итоги и сравнение с заявкой

В заявке на участие в конкурсе были запланированы исследования на две основные темы: спектры Маркова и Лагранжа и производная функции Минковского и её обобщений, называемых функциями Данжуа.

В первом пункте удалось получить необходимое и достаточное условие того, является ли данное число x из спектра Лагранжа допустимым. То есть, существует ли такое иррациональное $\alpha = [0; a_1, \ldots, a_n, \ldots]$, что $x = \lambda(\alpha)$, где $\lambda(\alpha)$ - постоянная Лагранжа, определяемая по следующему правилу:

$$\lambda(\alpha) = \limsup_{n\to\infty}\Big([a_n; a_{n+1}, \ldots] + [0; a_{n-1}, \ldots, a_1]\Big).$$

Благодаря сформулированному условию удалось показать, что числа из $\mathbb{L}$, не являющихся допустимыми, образуют счетное множество, построив бесконечную серию таких чисел.

Получить новые результаты в области сравнения спектров Маркова и Лагранжа не удалось, здесь меня обошли Carlos Matheos и Carlos Gustavo Moreira, которые, в частности, опровергли гипотезу Кузика, построив примеры чисел из $\mathbb{M} \setminus \mathbb{L}$, большие $\sqrt{12}$.

Вторая тема - исследования функции Минковского и функций Данжуа. Для функций Данжуа мне не удалось получить ответа для общего случая $g_\lambda(x)$. Дело в том, что, как уже было показано в моей работе для $\lambda = \frac{1}{\varphi^2}$, где $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, в наиболее интересном случае, когда производная равна 0 соответствующий континуант получается непериодическим. А значит, аналог константы κ_2 из Теоремы 5 не выражается через логарифмы от квадратичных иррациональностей. В общем случае ситуация оказывается еще более сложной и, как мне кажется, не имеет ответа в виде простой формулы. Замечу также, что случай, когда производная равна $+\infty$ (аналог Теоремы 1), напротив, тривиален, хотя доказательство этого факта, насколько мне известно, нигде не написано.

С другой стороны, немало результатов удалось получить для функции Минковского, которая является частным случаем функций Данжуа. Во-первых, удалось получить оценку на нетривиальные неподвижные точки этой функции. То есть, иррациональные решения уравнения $?(x) = x$. Нетрудно показать, что их как минимум два. Известная недоказанная гипотеза утверждает, что таких корней ровно два (известно, что это множество симметрично относительно точки $\frac{1}{2}$). Совместно с Н. Шульгой нам удалось показать, что эта гипотеза следует из весьма изящного условия

$$\left|?\left(\frac{p}{q}\right) - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{2q^2}$$

для всех достаточно больших q. Независимо от этой гипотезы, мы показали, что для т.н. неустойчивых неподвижных точек верны нетривиальные оценки на поведение неполных частных и получили, что такие точки имеют меру иррациональности 2. Заметим, что если гипотеза верна, то обе неподвижные точки неустойчивы.

Большое количество результатов было получено в задаче о производной функции Минковского, что упомянуто в отчётах за этот и предыдущий год. Прогресса удалось добиться во всех ситуациях - и когда производная равна 0 и когда она равна $+\infty$. Совместно с И. Каном был построен ряд конструкций, что позволило улучшить в этих ситуациях как оценку, так и пример.