Отчет за 2019 год по конкурсу "Молодая математика России"

Денис Городков

1 Полученные результаты

В течение последнего года основной результат состоит в нахождении явного естественного представителя среди всех локальных формул для первого класса Понтрягина.

Формула Гайфуллина 2004 года для первого рационального класса Понтрягина предоставляет явный и вычислимый способ подсчета по комбинаторному многообразию его первого рационального класса Понтрягина.

Формула Гайфуллина представляет цикл $f_\sharp(M)$, представляющий класс гомологий, двойственный по Пуанкаре к p_1, в виде

$$f_\sharp(M) = \sum_{\sigma^{n-4} \in M} f(\operatorname{link}\sigma)\sigma,$$

где f – функция на ориентированных комбинаторных 3-мерных сферах. Описание функции f делается на языке бизвездных преобразований, элементарных преобразований комбинаторных многообразий, заменяющих полный подкомплекс полной размерности $\sigma * \partial\tau$ в комбинаторном многообразии на комплекс $\partial\sigma * \tau$. Если две комбинаторные трехмерные сферы L_1 и L_2 соединены бизвездным преобразованием β, то $f(L_2) - f(L_1) = \sum_v h(\beta_v)$, где суммирование ведется по всем общим вершинам v сфер L_1 и L_2 таким, что в линке вершины v преобразование β индуцирует бизвездное преобразование β_v двумерных комбинаторных сфер. Функция h является функцией на множестве бизвездных преобразований двумерных ориентированных комбинаторных сфер. В исходной работе А. А. Гайфуллина описаны все допустимые функции h, однако не найдено геометрически естественного и локально вычислимого представителя.

В совместной работе с А. А. Гайфуллиным мы предъявили такой выбор формулы в терминах перераспределения комбинаторной кривизны под действием бизвездных преобразований.

Теорема. *Зададим функцию f индуктивно как*

$$f(L_2) - f(L_1) = \sum_v \widetilde{\operatorname{lk}}(\xi(\beta_v)),$$

где L_1 и L_2 соединены бизвездным преобразованием β, β_v – бизвездное преобразование двумерных сфер, индуцированное β в линке вершины v, а суммирование ведется по всем вершинам, участвующим в β и присутствующим в L_1 и L_2. Тогда f корректно определена и является локальной комбинаторной формулой для p_1.

Здесь ξ – функция на множестве бизвездных преобразований двумерных комбинаторных сфер, сопоставляющая сфере некоторый естественный 1-цикл в канонически строящейся по бизвездному преобразованию комбинаторной трехмерной сфере, а $\widetilde{\mathrm{lk}}$ – "коэффициент зацепления" этого цикла с собой (для корректности определения нужно каноническим образом разнести цикл, чтобы он не пересекался со своей копией).

2 Публикации и поданные в печать работы

1. D. Gorodkov, "A 15-Vertex Triangulation of the Quaternionic Projective Plane", *Discrete Comput. Geom.*, **62**:2 (2019), 348–373;

2. А. А. Гайфуллин, Д./,А. Городков, "Явный вид локальной комбинаторной формулы для первого класса Понтрягина", *УМН*, **74**:6(450) (2019), 161–162

3 Доклады и выступления на конференциях

08/19 *Международная конференция "Топология, геометрия и динамика: Рохлин – 100", Математический институт им. Л. Эйлера, Санкт-Петербург, Россия;* "Триангуляции кватернионной проективной плоскости и классы Понтрягина"

10/19 *Семинар отдела геометрии и топологии МИАН "Геометрия, топология и математическая физика", Москва, Россия;* "Перераспределение кривизны при бизвездных преобразованиях и комбинаторная формула для первого класса Понтрягина"

12/19 *Семинар "Характеристические классы и теория пересечений", Москва, Россия;* "Redistribution of curvature under bistellar flips and a combinatorial formula for the first Pontryagin class"

4 Итоги

Наибольшее развитие за последние три года получила задача о нахождении алгоритмов вычисления рациональных классов Понтрягина. Был изучен вопрос наличия целочисленных формул для первого класса Понтрягина и найдена естественная геометрическая рациональная формула.

Задача о комбинаторном вычислении характеристических классов Миллера-Мориты-Мамфорда свелась к сложным комбинаторным вопросам, не поддающимся решению на настоящий момент.

Задачи в области минимальных триангуляций и кандидатов в минимальные триангуляции проективных плоскостей не решены на настоящий момент, однако были найдены интересные связи с несколькими алгебро-геометрическими и алгебраическими конструкциями.