Отчет по гранту конкурса «Молодая математика России» за 2018 год

Егор Косов

1. Полученные результаты

В отчетный год исследовались свойства дробной регулярности распределений, являющихся образами гауссовской меры под действием Соболевских отображений, а так же были получены оценки для различных расстояний между такими распределениями. Для этого были применены результаты, полученные за прошлый год исследования. Основные результаты, полученные в этом году заключаются в следующем:

1. Получены оценки на L^1-модуль непрерывности плотности распределения отображения с компонентами из второго Соболевского класса по гауссовской мере через меру множества, на котором определитель матрицы Маллявена данного отображения принимает малые значения;

2. Доказана принадлежность классам Никольского–Бесова плотностей распределений Соболевских отображений при условии слабой невырожденности матрицы Маллявэна;

3. Получены неравенства, оценивающие расстояние по вариации между распределениями двух отображений из второго Соболевского класса через расстояние Канторовича между ними;

4. Доказана оценка на расстояние по вариации между распределениями двух многочленов фиксированной степени на пространстве с произвольной логарифмически вогнутой мерой через L^2-расстояние между многочленами.

Приведем теперь точные формулировки полученных результатов. Для простоты результаты будут сформулированы для случая стандартной гауссовской меры на $\mathbb{R}^n$, но, в силу независимости результатов от размерности n, все они переносятся и на бесконечномерный случай. Пусть γ — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$, т.е. мера с плотностью $(2\pi)^{-n/2}\exp(-|x|^2/2)$ относительно меры Лебега. Пусть $f = (f_1, \ldots, f_k)\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ — отображение, с компонентами f_j из второго Соболевского класса $W^{p,2}(\gamma)$. В отчетный период исследовались свойства дробной регулярности распределений вида $\gamma\circ f^{-1}$, где образ меры задан равенством $\gamma\circ f^{-1}(A) = \gamma(x : f(x)\in A)$ для произвольного борелевского A.

Хорошо известно, что регулярность распределения $\gamma\circ f^{-1}$ тесно связана с невырожденностью матрицы Маллявэна M_f отображения f:

$$M_f(x) = (m_{i,j}(x))_{i,j\le k}, \quad m_{i,j}(x) := \langle \nabla f_i(x), \nabla f_j(x)\rangle.$$

Пусть $\Delta_f := \det M_f$ — определитель матрицы Маллявэна. Также, для произвольной функции $g\ge 0$, положим

$$u_\gamma(g,\varepsilon) := \int_0^\infty (s+1)^{-2}\gamma\bigl(g\le \varepsilon s\bigr)\,ds.$$

В следующей теореме представлен первый основной результат, полученный за отчетный год в работе [1].

Теорема 1. *Пусть $k\in\mathbb{N}$, $a>0$, $p>4k-1$. Существует такое число $C := C(p,k,a) > 0$, что для произвольного отображения $f\colon \mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^k$, $f\in W^{p,2}(\gamma)$ с $\|f\|_{W^{p,2}(\gamma)} \le a$ и для произвольного числа $\varepsilon\in(0,1)$ выполнена оценка*

$$\|(\gamma\circ f^{-1})_h - \gamma\circ f^{-1}\|_{\mathrm{TV}} \le C|h|\varepsilon^{-2}u_\gamma(\Delta_f,\varepsilon)^{1-(4k-1)/p} + u_\gamma(\Delta_f,\varepsilon), \quad \forall h\in\mathbb{R}^k,$$

где $(\gamma\circ f^{-1})_h(A) := \gamma\circ f^{-1}(A-h)$ — сдвиг распределения $\gamma\circ f^{-1}$ на вектор h, а $\|\cdot\|_{\mathrm{TV}}$ — норма вариации на пространстве мер.

В качестве следствия получен результат о принадлежности плотности распределения Соболевского отображения пространству Никольского при условии слабой невырожденности отображения.

Следствие 1. *Пусть $k \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $b > 0$, $\theta \in (0,1)$, $p > 4k-1$. Найдется такое число $C := C(p,k,a,b,\theta) > 0$, что для всякого отображения $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $f \in W^{p,2}(\gamma)$ с*

$$\|f\|_{W^{p,2}(\gamma)} \le a, \quad \int \Delta_f^{-\theta}\, d\gamma \le b,$$

выполнено

$$\|(\gamma \circ f^{-1})_h - \gamma \circ f^{-1}\|_{\mathrm{TV}} \le C|h|^{\frac{p\theta}{2p+(4k-1)\theta}}, \quad \forall h \in \mathbb{R}^k.$$

Полученная оценка означает, что плотность меры $\gamma \circ f^{-1}$ принадлежит пространству Никольского $B^{\frac{p\theta}{2p+(4k-1)\theta}}(\mathbb{R}^k)$.

Отметим, часто при исследовании Соболевской гладкости распределений отображений с помощью классического метода Маллявена возникают условия невырожденности отображения вида $\Delta_f^{-1} \in L^r$ при $r > 1$. Предыдущее следствие отвечает на вопрос о регулярности распределения при более слабом условии невырожденности. Оказывается, нужно привлечение пространств Никольского дробной регулярности. Доказательство теоремы 1 основано на модификации классического метода Маллявена посредством результатов первого года исследования.

Второй основной результат этого года, представленный в работе [2], дает оценку расстояния по вариации между распределениями двух многочленов фиксированной степени на пространстве с произвольной логарифмически вогнутой мерой через L^2-расстояние между многочленами. Напомним, что вероятностная мера μ на $\mathbb{R}^n$ называется логарифмически вогнутой, если ее плотность имеет вид e^{-V}, где V — выпуклая функция. Два основных примера логарифмически вогнутых мер — это гауссовские меры и равномерные распределения на выпуклых множествах в $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2. *Для любых чисел $n, d \in \mathbb{N}$, $d \ge 2$, существует такое число $C(d)$, что для каждой логарифмически вогнутой меры μ на $\mathbb{R}^n$ и для произвольных многочленов f, g степени не выше d на $\mathbb{R}^n$ выполнено*

$$\sigma_g^{1/d}\|\mu \circ f^{-1} - \mu \circ g^{-1}\|_{\mathrm{TV}} \le C(d)\|f-g\|_{L^2(\mu)}^{1/d},$$

где $\sigma_g^2 := \mathbb{D}g$ — дисперсия g.

Отметим, что в силу независимости константы от размерности результат переносится и на случай логарифмически вогнутой меры на бесконечномерном пространстве. В случае гауссовской меры подобное свойство многочленов было впервые сформулировано Давыдовом и Мартыновой [3] в следующем виде:

Пусть $d \in \mathbb{N}$ и пусть g — непостоянный многочлен степени не выше d на $\mathbb{R}^n$. Тогда найдется такое число $C(d,g)$, что для всякого многочлена f степени не выше d выполнено

$$\|\gamma \circ f^{-1} - \gamma \circ g^{-1}\|_{\mathrm{TV}} \le C(d,g)\|f-g\|_{L^2(\gamma)}^{1/d},$$

где γ — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$

В работе [3] отсутствуют важные технические подробности доказательства, которые возможно найти только в диссертации Мартыновой. Из-за этого были предприняты несколько попыток получить полное доказательство результата Давыдова–Мартыновой. В работе [4] была получена следующая теорема с худшей степенью L^2-нормы, но проясняющая зависимость константы $C(d,g)$ от многочлена g:

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $a > 0$, $b > 0$. Существует такое число $C(d,a,b) > 0$, что для всяких многочленов f, g степени не выше d на $\mathbb{R}^n$ с $\sigma_g^2 \in [a,b]$ выполнено

$$\|\gamma \circ f^{-1} - \gamma \circ g^{-1}\|_{\mathrm{TV}} \le C(d,a,b)\|f-g\|_{L^2(\gamma)}^{1/(2d)}.$$

В работе [5] было получено изначальное неравенство Давыдова–Мартыновой с правильной степенью L^2-нормы, но с худшей константой по сравнению с результатом из [4]:

Пусть $d \in \mathbb{N}$. Найдется такое число $c(d)$, что для всяких многочленов f, g степени не выше $d \geq 2$ на $\mathbb{R}^n$ выполнено

$$\|\gamma \circ f^{-1} - \gamma \circ g^{-1}\|_{\mathrm{TV}} \leq c(d)\big(\|\nabla g\|_*^{-1/(d-1)} + 1\big)\|f - g\|_2^{1/d},$$

где

$$\|\nabla g\|_*^2 := \sup_{|e|=1} \int |\partial_e g|^2 \, d\gamma.$$

Отметим теперь, что теорема 2 сочетает правильную степень L^2-нормы, как в [3] и [5], с зависимостью константы $C(d, g)$ только от дисперсии g, как в [4], и обобщает неравенство на весь класс логарифмически вогнутых мер вместо гауссовских.

Список литературы

[1] Kosov E.D., *On fractional regularity of distributions of functions in Gaussian random variables*, arXiv:1812.02416

[2] Kosov E.D., *Total variation distance estimates via L^2-norm for polynomials in log-concave random vectors*, arXiv:1812.02411

[3] Davydov Y.A., Martynova G.V., *Limit behavior of multiple stochastic integral*, Statistics and Control of Random Processes. Nauka, Preila, Moscow. 55–57 (1987)

[4] Nourdin I., Poly G., *Convergence in total variation on Wiener chaos*, Stochastic Processes Appl. 123:2, 651–674 (2013)

[5] Zelenov G.I., *On distances between distribution of polynomials*, Theory Stoch. Processes 38:2, 79–85 (2017)

2. Опубликованные и поданные в печать работы

Опубликованные работы:

1. Косов Е.Д., *Классы Бесова на пространстве с гауссовской мерой*, Доклады Академии наук, 478:2, 133–136 (2018)

Работы, принятые к печати:

2. Косов Е.Д., *Классы Бесова на конечномерных и бесконечномерных пространствах*, Мат. Сборник (2019), принята к публикации

Препринты:

3. Kosov E.D., *On fractional regularity of distributions of functions in Gaussian random variables*, arXiv:1812.02416
4. Kosov E.D., *Total variation distance estimates via L^2-norm for polynomials in log-concave random vectors*, arXiv:1812.02411

Работы, поданные в печать до получения премии «Молодая математика России»:

5. Kosov E.D., *Fractional smoothness of images of logarithmically concave measures under polynomials*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 462:1, 390–406 (2018)
6. Bogachev V.I., Kosov E.D., Zelenov G.I., *Fractional smoothness of distributions of polynomials and a fractional analog of the Hardy-Landau-Littlewood inequality*, Transactions of the American Mathematical Society, 370:6, 4401–4432 (2018)
7. Arutyunyan L.M., Kosov E.D., *Deviation of polynomials from their expectations and isoperimetry*, Bernoulli, 24:3, 2043–2063 (2018)

3. Диссертация

Защищена кандидатская диссертация «Полиномиальные образы и сдвиги мер на линейных пространствах» под руководством В.И. Богачева (дата защиты — 18 мая 2018 года).

4. Участие в конференциях и школах, доклады на научных семинарах

1. Доклад “Fractional regularity of distributions of functions in Gaussian random variables” на международном научно-исследовательском семинаре “Infinite-dimensional stochastic analysis” в университете г. Билефельда, Германия, 5 декабря 2018.

2. Доклад “Пространства Бесова с гауссовским весом” на семинаре по теории функций действительного переменного под руководством академиков Б.С. Кашина и С.В. Конягина, МГУ, 9 ноября 2018.

3. Доклад “Estimates of the total variation distance between polynoimial random variables” на научно-исследовательском семинаре “Structural Learning Seminar”, ИППИ РАН, 7 июня 2018.

4. Доклад “Новый модуль непрерывности и классы Бесова на конечномерных и бесконечномерных пространствах” на семинаре по теории функций многих действительных переменных и ее приложениям к задачам математической физики (Семинар Никольского), МИАН, 11 апреля 2018.

5. Доклад “Besov spaces with respect to a Gaussian measure” на международной конференции «Бесконечномерный анализ и теория управления», посвященной 100-летию со дня рождения С.В. Фомина, МГУ, 30 января 2018.

5. Педагогическая деятельность

Весна 2018: семинары по теории вероятностей и математической статистике, семинары по математическому анализу на Факультете Компьютерных Наук ВШЭ; семинары по математическому анализу на мехмате МГУ.

Осень 2018: лекции по теории вероятностей и математической статистике на Факультете Компьютерных Наук ВШЭ; семинары по теории вероятностей и математической статистике, семинары по математическому анализу на Факультете Компьютерных Наук ВШЭ; семинары по математическому анализу на мехмате МГУ.