Отчет по гранту конкурса «Молодая математика России» за 2019 год

Егор Косов

1. Полученные результаты

Основные вопросы, исследуемые за отчетный период, были связаны со свойствами регулярности линейных и полиномиальных образов дифференцируемых по Скороходу мер. Основные результаты, полученные за отчетный год, заключаются в следующем:

1. Получены оценки на норму производной по Скороходу для образа под действием оператора ортогонального проектирования продакт меры с дифференцируемыми по Скороходу сомножителями.

2. Доказана принадлежность пространсвту Никольского–Бесова плотностей образов дифференцируемых по Скороходу мер под действием многочленов.

Приведем теперь точные формулировки полученных результатов. Пусть μ — дифференцируемая по Скороходу мера на $\mathbb{R}^n$. Это означает, что для кажого вектора h найдется такая борелевская мера $D_h\mu$, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \partial_h\varphi\, d\mu = -\int_{\mathbb{R}^n} \varphi\, d(D_h\mu)$$

для каждой функции $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. В случае меры μ на прямой будем использовать обозначение μ' вместо $D_1\mu$. Отметим, что мера μ диференцируема по Скороходу тогда и только тогда, когда она имеет плотность ρ_μ из классу BV функций ограниченной вариации, т.е. каждая обобщенная производная функции ρ_μ является некотрой ограниченной мерой. В работе [1] исследуются свойства регулярности индуцированных мер $\mu\circ f^{-1}$ для линейных и полиномиальных функций f. Здесь и далее символ $\mu\circ f^{-1}$ обозначает образ меры μ под действием отображения f (распределение f, как случайной величины), т.е. $\mu\circ f^{-1}(A) := \mu(f\in A)$ для всех борелевских множеств A.

Первый основной результат работы касается мер μ вида: $\mu = \mu_1\otimes\ldots\otimes\mu_n$, где каждый сомножитель μ_j есть вероятностная мера на $\mathbb{R}$. Такие меры получаются, как распределения случайных векторов $\xi := (\xi_1,\ldots,\xi_n)$ с независимыми компонентами $\xi_1,\ldots,\xi_n$. В работе [5] Рудельсоном и Вершининым было показано, что существует такая абсолютная постоянная C, что, для каждого ортогонального проектора P на k-мерное подпространство в $\mathbb{R}^n$, плотность случайного вектора $P\xi$ ограничена числом C^k, при условии, что плотность каждой случайной величины ξ_j оценивается сверху единицей. В работе [1] рассматривается аналогичный вопрос для нормы производной по Скороходу вместо максимума плотности. В частности, в этой работе доказан следующий аналог теоремы Рудельсона–Вершинина.

Теорема 1. *Для каждого $k\in\mathbb{N}$ найдется такое число $C(k)$, зависящее только от k, что, для произвольных вероятностных мер $\mu_1,\ldots,\mu_n$ на $\mathbb{R}$, у которых $\max\limits_{1\le j\le n}\|\mu_j'\|_{\mathrm{TV}}\le 1$, и для произвольного ортгонального проектора P на k-мерное подпространство, выполнено неравенство*

$$\sup_{|e|=1}\|D_e[\mu\circ P^{-1}]\|_{\mathrm{TV}} \le C(k),$$

где $\mu = \mu_1\otimes\ldots\otimes\mu_n$. Кроме того, $C(1)=\sqrt{2}$.

Напомним, что норма полной вариации меры σ на $\mathbb{R}^n$ определена равенством

$$\|\sigma\|_{\mathrm{TV}} := \sup\biggl\{\int\varphi\,d\sigma,\ \varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ \|\varphi\|_\infty\le 1\biggr\},$$

где $\|\varphi\|_\infty := \sup|\varphi(x)|$, а $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — это пространство всех бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем.

Доказательство приведенной выше теоремы основано на недавнем результате Бобкова, Чистякова и Гётце [2, Лемма 4.3] о представление произвольной дифференцируемой по

Скороходу вероятностной меры ν на $\mathbb{R}$ в виде выпуклой комбинации равномерных распределений

$$\nu = \int \nu_{[a,b]}\, \pi(dadb)$$

с такой мерой π, что

$$\|\nu'\|_{\mathrm{TV}} = \int \|\nu'_{[a,b]}\|_{\mathrm{TV}}\, \pi(dadb).$$

Такое представление позволяет свести доказательство к случаю, когда вектор ξ получен как линейный образ равномерного распределния на кубе $Q_n = [-1/2, 1/2]^n$, а затем применить некоторые известные результаты из теории логарифмически вогнутых мер, т.к. любой линейный образ равномерного распределения на выпуклом множестве будет логарифмически вогнутой мерой.

Второй основной результат работы [1] связан с дробной гладкостью плотностей полиномиальных образов дифференцируемых по Скороходу мер. Прежде чем сформулировать сам результат, напомним определение пространства Никольского–Бесова на прямой. Пространство $B^{\alpha}_{1,\infty}(\mathbb{R})$ с параметром дробной гладкости $\alpha \in (0,1)$ состоит из всех таких функций $g \in L^1(\mathbb{R})$, что

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x+h) - g(x)|\, dx \le C|h|^{\alpha}$$

для некоторого числа $C = C(g) > 0$. Теперь перейдем к формулировке второго основного результата отчетного периода.

Теорема 2. *Пусть μ — дифференцируемая по Скороходу мера на $\mathbb{R}^n$. Тогда для произвольного многочлена f степени d на $\mathbb{R}^n$ плотность ϱ_f распределения $\mu \circ f^{-1}$ принадлежит пространству Никольского–Бесова $B^{1/d}_{1,\infty}(\mathbb{R})$. Кроме того, если записать многочлен f в виде суммы мономов:*

$$f(x) := \sum_{j=0}^{d} B_j(x, \ldots, x),$$

где $B_j \colon (\mathbb{R}^n)^j \to \mathbb{R}$ — это симметричная j-линейная функция на $(\mathbb{R}^n)^j$, то верна оценка

$$\|B_d\|^{1/d} \int_{\mathbb{R}} |\rho_f(t+h) - \rho_f(t)|\, dt \le 24\pi \sup_{|\theta|=1} \|D_\theta \mu\|_{\mathrm{TV}} |h|^{1/d},$$

где

$$\|B_d\| := \sup_{|x_1|=1,\ldots,|x_d|=1} |B_d(x_1, \ldots, x_d)|.$$

Доказательство данной теоремы основано на идеях из работ [4] и [3].

Список литературы

[1] Kosov, E. D. "Regularity of linear and polynomial images of Skorohod differentiable measures." arXiv:1907.01084

[2] Bobkov, S.G., Chistyakov, G.P., Götze, F.: Fisher information and the central limit theorem. Probab. Theory Related Fields **159**(1-2), 1–59 (2014)

[3] Bogachev, V. I., E. D. Kosov, and G. I. Zelenov. "Fractional smoothness of distributions of polynomials and a fractional analog of the Hardy–Landau–Littlewood inequality." *Transactions of the American Mathematical Society* 370, no. 6 (2018): 4401–4432.

[4] Kosov, E. D. "Fractional smoothness of images of logarithmically concave measures under polynomials." *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 462, no. 1 (2018): 390–406.

[5] Rudelson, M., Vershynin, R.: Small ball probabilities for linear images of high-dimensional distributions. Int. Math. Res. Not. **2015**(19), 9594–9617 (2014)

2. Опубликованные и поданные в печать работы

Опубликованные работы:

1. Косов Е.Д., *Классы Бесова на конечномерных и бесконечномерных пространствах*, Мат. Сборник (2019), 210:5, 41–71.

2. Косов Е.Д., *Оценка между расстояниями по вариации и в пространстве L^2 для многочленов от логарифмически вогнутых случайных векторов*, Доклады Академии наук (2019), 488:2, 123–125.

3. Kosov E.D., *On fractional regularity of distributions of functions in gaussian random variables*, Fract. Calc. Appl. Anal. (2019), 22:5, 1249–1268.

4. Bogachev V.I., Kosov E.D., Popova S.N., *A new approach to Nikolskii-Besov classes*, Moscow Math. J. (2019), 19:4, 619–654.

Работы, принятые к печати:

5. Kosov E.D., *Total variation distance estimates via L^2-norm for polynomials in log-concave random vectors*, to appear in International Mathematics Research Notices.

Препринты:

6. Kosov E.D., *Regularity of linear and polynomial images of Skorohod differentiable measures*, arXiv:1907.01084

3. Участие в конференциях и школах, доклады на научных семинарах

1. Доклад "Regularity of linear and polynomial images of Skorohod differentiable measures" на международном научно-исследовательском семинаре "Infinite-dimensional stochastic analysis" в университете г. Билефельда, Германия, 4 декабря 2019.

2. Доклад "Lower bounds for measures of deviation of polynomials from their expectations" на научно-исследовательском семинаре "Structural Learning Seminar", ИППИ РАН, 19 марта 2019.

4. Работа в научных центрах и научных группах.

Являюсь сотрудником двух лабораторий: "Международной лаборатории стохастических алгоритмов и анализа многомерных данных" и лаборатории "Многомерная аппроксимация и приложения".

5. Педагогическая деятельность

Весна 2019: семинары по теории вероятностей и математической статистике, семинары по математическому анализу на Факультете Компьютерных Наук ВШЭ; семинары по математическому анализу, действительному анализу и функциональному анализу на мехмате МГУ.

Осень 2019: семинары по теории вероятностей и математической статистике, семинары по математическому анализу на Факультете Компьютерных Наук ВШЭ; семинары по математическому анализу и функциональному анализу на мехмате МГУ.

6. Отчет за три года

За прошедщие три года, совместно с В.И. Богачевым и С.Н. Поповой, был разработан новый подход к проверке принадлежности функций пространствам Никольского–Бесова. Данный подход оказался очень удобным средством исследования дробной гладкости плотностей распределений нелинейных функционалов на пространствах с гауссовскими и более общими мерами. В частности, в нескольких работах данный метод был применен для получения точных результатов о дробной регулярности плотностей распределений многочленов и полиномиальных отображений, что предполагалось основным направлением исследования, озвученным в заявке. Тем самым, все заявленные конкретные результаты были получены еще в первой половине трехлетнего периода, но во время работы над ними появилось много новых интересных задач. Некоторые из таких задач были уже рассмотрены в предыдущем и в этом годах. Например для класса логарифмически вогнутых мер были получены неулучшаемые оценки расстояния по вариации между распределениями двух многочленов фиксированной степени через L^2-расстояние между самими многочленами. Этот результат усиливает ранее известнрые оценки в гауссовском случае. В дальнейшем планируется заняться и другими задачами о свойствах распределений нелинейных функционалов, появившимися в ходе выполнения проекта. Также во время этих трех лет начато сотрудничество с двумя лабораториями, что также принесло много новых интересных задач. Подводя итог, считаю, что эти три года прошли для меня очень продуктивно. Я искренне благодарен фонду Молодая Математика России за оказанную поддержку.