Отчет по гранту конкурса "Молодая математика России"

Антон Щечкин

12 декабря 2017 г.

1 Полученные результаты

Из формальных вещей, в этом году вышли две работы с моим соавторством [1], [2], которые, фактически, были написаны еще в прошлом году.

Моя научная деятельность в этом году (совместно с моим научным руководителем Михаилом Берштейном) была посвящена соответствию между $c=-2$, $c=1$ и $c=\infty$ конформными блоками.

1.1 Резонансный случай τ-функции уравнения Пенлеве VI, скрининги и матричные модели

Первая часть нашей деятельности была связана с τ-функциями уравнения Пенлеве VI в случае резонансных условий на параметры уравнения и начальные данные: $\sum_{i=1}^{4}\theta_i = N, N \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$, $\sigma=-\theta_1-\theta_2$. Эти исследования проводились в контексте формулы Гамаюна-Иоргова-Лисового (2012), которая выражает τ-функцию уравнений Пенлеве (зависящую от 4 параметров θ_i уравнения и начальных данных σ, s) в виде бесконечной суммы по $c=1$ конформным блокам $\mathcal{F}(\overrightarrow{\theta^2};\Delta|z)$ алгебры Вирасоро:

$$\tau(\overrightarrow{\theta},\sigma,s|z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} C(\overrightarrow{\theta};\sigma+n)s^n z^{(\sigma+n)^2}\mathcal{F}(\overrightarrow{\theta^2};(\sigma+n)^2|z), \tag{1.1}$$

где структурные константы $C(\overrightarrow{\theta};\sigma+n)$ выражаются в терминах функций Барнса (а эффективно — в терминах рациональных функций).

Более точно, в работе Морозова-Миронова этого года было предложено утверждение (без доказательства), что в резонансном случае эта τ-функция есть конформный блок от бозонных вертексных операторов с N вставленными скрининговскими операторами, причем контурный интеграл задан линейной комбинацией $\int_1^\infty + s\int_0^z$. С другой стороны, этот конформный блок представляется в виде интеграла, известного по матричным моделям, который может быть переписан в виде ганкелевского детерминанта матрицы размера N

$$\begin{gathered}\tau_N(s|z)=z^{(\theta_0+\theta_z)^2}(1-z)^{2\theta_1\theta_z}\det G(i+j)_N,\\ G(k)=\mathrm{B}(2\theta_{123}-k-1,1-2\theta_3)\,{}_2F_1(2\theta_{123}-1-k,2\theta_2;2\theta_{12}-k|z)+\\ -\frac{\sin 2\pi\theta_2}{\sin 2\pi\theta_3}sz^{1+k-2\theta_{12}}\,\mathrm{B}(1+k-2\theta_1,1-2\theta_2)\,{}_2F_1(2\theta_3,1+k-2\theta_1;2+k-2\theta_{12}|z)\end{gathered} \tag{1.2}$$

т.е. ряд по s обрезается до $N+1$ слагаемого (со стороны формулы (1.1) это обрезание следует из зануления структурных констант C). Мы доказали данное утверждение, которое было не доказано в части равенства структурных констант ряда для τ-функции.

Другой естественный вопрос в данном контексте следующий. Существует уравнение Окамото "типа Тоды"на τ-функцию уравнения Пенлеве вида

$$\left(z(z-1)\frac{d}{dz}\right)^2\log\widetilde{\tau}_m=c(m)\frac{\widetilde{\tau}_{m+1}\widetilde{\tau}_{m-1}}{\widetilde{\tau}_m^2}, \tag{1.3}$$

где $\widetilde{}$ означает некую другую нормировку чем у τ, $c(m)$ — числовой множитель, $\{\tau_m, m \in \mathbb{Z}\}$ — последовательность τ-функций порожденная действием преобразованием Бэклунда $\theta_t \mapsto \theta_t + 1/2, \theta_\infty \mapsto \theta_\infty + 1/2$ бесконечного порядка. Кроме всего прочего, мы доказали, что τ-функция (1.1) удовлетворяет этому уравнению исходя из теории представлений, а именно из вложения $\mathsf{Vir} \oplus \mathsf{Vir} \subset \mathsf{F} \oplus \mathsf{NSR}$, вычисляя конформный блок с вертексными операторами, соответствующими "второму по высоте"старшему вектору $\mathsf{Vir} \oplus \mathsf{Vir}$ в модуле Верма алгебры $\mathsf{F} \oplus \mathsf{NSR}$.

Соответственно, если мы знаем две последовательные τ-функции из цепочки, все остальные мы можем восстановить исходя из этого уравнения. Известно, что решение уравнения Окамото для цепочки, начинающейся с $\widetilde{\tau}_0 = 1$ дается при $m \geq 0$ детерминантом размера m

$$\widetilde{\tau}_m = \det_m \left(\left(z(z-1)\frac{d}{dz} \right)^{i+j} \widetilde{\tau}_1 \right) \tag{1.4}$$

(а при $m < 0$ это решение тождественный ноль). Соответственно, если в качестве $\widetilde{\tau}_1$ мы возьмем τ-функцию Пенлеве VI, которая равна $G(0)$, то мы должны получить цепочку, следующую из вставленных скринингов. Следовательно, эта цепочка имеет два детерминантных представления в виде детерминантов одинакового размера. Мы доказали, как привести один детерминант к другому (по факту, это оказались два принципиально разных представления).

В принципе, эта вся часть нашей работы с резонансной τ-функцией была элементарной и сводилась к технически нетривиальным преобразованиям детерминантов. Она имеет ценность и сама по себе ("аналитическим продолжением"по N и по числу контуров каждого типа (от 0 до z, например) она дает простое доказательство формулы Гамаюна-Иоргова-Лисового), но хочется ее применить для получения новых результатов. Одной из возможностей является q-деформация. Другая — это случай центрального заряда $c = -2$, о котором пойдет речь ниже.

1.2 $c = -2$ τ-функция

Более содержательной и самостоятельной частью нашей деятельности являлось изучение того, что мы назвали $c = -2$ τ-функцией. Интерес к рассмотрению $c = -2$ конформного блока и соответствующих τ-функций связан с тем, что они появляются в целом ряда слабо связанных между собой сюжетов

- С точки зрения матричных моделей описанная выше резонансная функция соответствует $\beta = 2$-матричномодельному интегралу, т.е. соответствующему унитарному ансамблю. Представления, аналогичные ганкелевскому (а именно, пфаффианные) известны и для интегралов при $\beta = 1, 4$. Оба эти случая эквивалентны вставке $c = -2$ скринингов (короткого и длинного соответственно) в Доценко-Фатеевский интеграл для конформного блока. Поэтому получаются, то что называется, короткая и длинная τ-функция (короткая равна сумме двух длинных). Это разделение естественно (см. следующий пункт).

- Существуют соотношения Накаджимы, которые выражают конформный блок Vir произвольного центрального заряда c в виде билинейной комбинации конформных блоков с конкретными, определенными по c центральными зарядами. Нас интересует случай, когда $c = 1$ конформный блок выражается в виде билинейной суммы $c = -2$ конформных блоков:

$$\check{\mathcal{F}}_{c=1}(\overrightarrow{\theta^2}; \sigma^2|z) =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{z^{n^2} l_n^{21} l_n^{34}}{l_n} \check{\mathcal{F}}_{c=-2}\left(\frac{1}{2}\theta_1^2 - \frac{1}{8}, \frac{1}{2}(\theta_2+1/2)^2 - \frac{1}{8}, \frac{1}{2}(\theta_3+1/2)^2 - \frac{1}{8}, \frac{1}{2}\theta_4^2 - \frac{1}{8}; \frac{1}{2}(\sigma+n)^2 - \frac{1}{8} \middle| z \right) \times$$
$$\times \check{\mathcal{F}}_{c=-2}\left(\frac{1}{2}\theta_1^2 - \frac{1}{8}, \frac{1}{2}(\theta_2-1/2)^2 - \frac{1}{8}, \frac{1}{2}(\theta_3-1/2)^2 - \frac{1}{8}, \frac{1}{2}\theta_4^2 - \frac{1}{8}; \frac{1}{2}(\sigma-n)^2 - \frac{1}{8} \middle| z \right), \tag{1.5}$$

где ˇ означает, что разложение блока начинается с $1+O(z)$ и

$$l_n^{21}=\prod_{i,j\geq 0, i+j<|n|}((\sigma\operatorname{sign} n+\theta_2+i-j)^2-\theta_1^2)\prod_{i,j\geq 0, i+j<|n|-1}((-\sigma\operatorname{sign} n+\theta_2+i-j)^2-\theta_1^2)=$$
$$=\frac{\prod_{\epsilon,\epsilon'=\pm 1}\mathsf{G}_d(1+\frac{1}{2}\theta_2-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\epsilon\theta_1+\frac{1}{2}\epsilon'(\sigma-n))\mathsf{G}_d(1+\frac{1}{2}\theta_2+\frac{1}{2}\epsilon\theta_1+\frac{1}{2}\epsilon'(\sigma+n))}{\prod_{\epsilon,\epsilon'=\pm 1}\mathsf{G}(1+\theta_2+\epsilon\theta_1+\epsilon'(\sigma+n))} \tag{1.6}$$

Оказывается, это соотношение можно просуммировать и получить соотношение на τ-функции

$$\tau(\overrightarrow{\theta};\sigma,s|z)=z^{1/4}(\tau_l(\overrightarrow{\theta}+\frac{1}{2}e_{23};\sigma,s|z)\tau_l(\overrightarrow{\theta}-\frac{1}{2}e_{23};\sigma,s|z)+\tau_l(\overrightarrow{\theta}+\frac{1}{2}e_{23};\sigma+1,s|z)\tau_l(\overrightarrow{\theta}-\frac{1}{2}e_{23};\sigma-1,s|z)). \tag{1.7}$$

где

$$\tau_l(\overrightarrow{\theta};\sigma,s|z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{\prod\limits_{\epsilon,\epsilon'=\pm 1}\mathsf{G}_d(1+\frac{1}{2}(\theta_2-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\epsilon\theta_1+\frac{1}{2}\epsilon'(\sigma+2n))\mathsf{G}_d(1+\frac{1}{2}(\theta_3-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\epsilon\theta_4+\frac{1}{2}\epsilon'(\sigma+2n))}{\mathsf{G}^{1/2}(1+2(\sigma+2n))\mathsf{G}^{1/2}(1-2(\sigma+2n))}\times$$
$$\times s^n\mathcal{F}_{c=-2}(\frac{1}{2}\overrightarrow{\theta}^2-\frac{1}{8};\frac{1}{2}(\sigma+2n)^2-\frac{1}{8}|z) \tag{1.8}$$

и $\mathsf{G}_d(z)\sim\mathsf{G}(z)\mathsf{G}(z+1/2)$ — функция, к которой, как оказывается, сводится пертурбативная часть статсуммы Некрасова в случае 12 минимальной модели ($c=-2$).

Если ввести короткую τ-функцию по формуле $\tau_s(\sigma;s|z)=\tau_l(\sigma,s^2|z)+i\tau_l(\sigma+1,s^2|z)$, то короткая τ-функция будет удовлетворять уравнению

$$\tau(\overrightarrow{\theta};\sigma,s|z)=z^{1/4}(\tau_s(\overrightarrow{\theta}+\frac{1}{2}e_{23};\sigma,\sqrt{s}|z)\tau_s(\overrightarrow{\theta}-\frac{1}{2}e_{23};\sigma,-\sqrt{s}|z) \tag{1.9}$$

Вся эта конструкция имеет Уиттекеровский предел в теории представлений, соответствующий переходу от Пенлеве VI к Пенлеве III(D_8). Также, мы проверили, что τ_l имеет логарифмический предел $s=e^{2\Omega\sigma},\sigma\to 0$, также, как и обычная $c=1$ τ-функция.

- Как известно из работы Литвинова, Лукьянова, Некрасова, Замолодчикова 2013 года, классический ($c=\infty$) конформный блок $f(z)$ имеет отношение к уравнению Пенлеве VI. Существует рассуждение, принадлежащее Некрасову, которое связывает между собой $c=1$ τ-функцию и классический конформный блок. Мы показали, что похожее соотношение есть и между $c=-2$ τ-функцией и классический конформный блоком. А именно: тут получаются соотношения на $c=-2$ и $c=\infty$ конформные блоки, которые суммируются в $c=-2$ τ-функцию
$$f'(z)\tau_l(\rho,\widetilde{s}|z)=-f(z)\tau_l'(\rho,\widetilde{s}|z)|_{\widetilde{s}=e^{-2\rho\frac{df(z)}{d\delta}}} \tag{1.10}$$
Здесь $\widetilde{s}$ с точностью до деталей это то же, что и s. Фактически, $c=-2$, $c=1$ и $c=\infty$ являются тремя центральными зарядами, которые важны для τ-функции уравнения Пенлеве VI.

- $c=-2$ привлекателен еще по целому ряду причин, например тем, что в этом случае существует представление соответствующей алгебры Вирасоро через симплектические фермионы. Работа в этом направлении только начаты.

2 Опубликованные работы

Список литературы

[1] M. Bershtein and A. Shchechkin, *q-deformed Painlevé tau function and q-deformed conformal blocks*, J. Phys. A. **50 8** (2017) 085202; [arXiv:1608.02566].

[2] M. Bershtein and A. Shchechkin, *Bäcklund transformation of Painlevé III(D_8) τ function*, J. Phys. A. **50 11** (2017) 115205; [arXiv:1608.02568].

3 Участие в конференциях и школах, доклады на семинарах

- *Явный вид τ-функции q-деформированного уравнения Пенлеве III(D_8) и её связь с геометрическим подходом Сакаи*, семинар Института математики НАН Украины (Киев, 29 марта 2017)

- *q-deformed Painleve equations and representation theory*, International School of Representation Theory and Integrable Systems (Korteweg-de Vries Institute for Mathematics, Amsterdam, 15-24 May 2017)

- *Bäcklund transformation of Painleve τ function from representation theory*, Integrable Models in Statistical Mechanics, Limit Shapes and Combinatorics (Saint-Petersburg, 7-11 August 2017) [http://www.pdmi.ras.ru/EIMI/2017/IMSM/presentations/shchechkin.pdf]

4 Педагогическая активность

Учебный ассистент на курсе "Гладкие многообразия"на факультете математики НИУ ВШЭ в 2016/2017 и 2017/2018 учебном году.