Отчет лауреата конкурса "Молодая математика России"

Антон Щечкин

15 декабря 2019 г.

Из формальных вещей, в этом году мы с моим научным руководителем Михаилом Берштейном выпустили статью [1], посвященную $c = -2$ тау-функциям. Работа над этой статьей, в целом, была завершена ещё в прошлом году, когда вышел препринт.

В этом году я продолжил заниматься изучением вопросов, поднятых в этой статье.

- Изучение симметрий и сходимости 5D Некрасовских статсумм в зависимости от уровня m добавленной теории Черн-Саймонса и числа полей материи N_f. А именно, к пятимерной статсумме Некрасова добавляется член вида

$$\mathsf{T}_\lambda(u; q_1, q_2) = \prod_{(i,j)\in\lambda} u^{-1} q_1^{1-i} q_2^{1-j}, \tag{0.1}$$

  который пропадает в четырехмерном пределе $q \to 1$. Добавление этого члена необходимо в простейшем случае для статсуммы Некрасова без полей материи для построения решения уравнения Пенлеве $A_7^{(1)}$ (это другая q-деформация беспараметрического Пенлеве III, неэквивалентная стандартной). Нам хотелось понять, какая связь между статсуммами Некрасова с разным уровнем Черн-Саймонса при большем числе материй, т.к. в этом случае q-деформация уравнений Пенлеве однозначна. Получены следующие результаты (формулы без q-Похгаммеров доказаны комбинаторно, остальное подобрано)

  - $N_f = 4$, сходимость только при: $m = 0$.
  - $N_f = 3$, сходимость только при: $m = 0, 1$. Связь между статсуммами:

$$\mathcal{Z}_1(a_*^{-1}, a_t^{-1}, a_0, u; q_1, q_2|z) = \mathcal{Z}_0(a_*, a_t, a_0, u; q_1^{-1}, q_2^{-1}| - q_1^4 q_2^4 a_t^2 a_*^{-1} z) \tag{0.2}$$

  - $N_f = 2$, сходимость только при: $m = -1, 0, 1$. Связь между статсуммами:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{-1}(a_*, a_\star, u; q_1, q_2|z) &= \mathcal{Z}_1(q_1 q_2 a_\star^{-1}, q_1^{-1} q_2^{-1} a_*^{-1}, u; q_1^{-1}, q_2^{-1}|q_1^2 q_2^2 z) \\ \mathcal{Z}_1(q_1^{-1} q_2^{-1} a_*, a_\star, u; q_1, q_2| - a_* z) &= (q_1 q_2 z; q_1, q_2)_\infty \mathcal{Z}_0(a_*, a_\star, u; q_1, q_2|z) \end{aligned} \tag{0.3}$$

  - $N_f = 1$, сходимость только при: $m = -2, -1, 0, 1$. Связь между статсуммами:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_{-1}(a_*, u; q_1, q_2|z) &= \mathcal{Z}_0(a_*^{-1}, u; q_1^{-1}, q_2^{-1}| - q_1^2 q_2^2 a_* z) \\ \mathcal{Z}_{-2}(a_*, u; q_1, q_2|z) &= \mathcal{Z}_1(a_*^{-1}, u; q_1^{-1}, q_2^{-1}| - q_1^2 q_2^2 a_* z) \\ \mathcal{Z}_{-2}(a_*, u; q_1, q_2|z) &= (q_1 q_2 z; q_1, q_2)_\infty \mathcal{Z}_0(a_*, u; q_1, q_2|q_1^{-1} q_2^{-1} z) \end{aligned} \tag{0.4}$$

  - $N_f = 0$, сходимость только при: $m = -2, -1, 0, 1, 2$, Связь между статсуммами уже была установлена и полностью доказана в прошлом году.

- Доказательство билинейных $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ соотношений раздутия из соотношений раздутия Накаджимы-Ёшиоки на $\mathbb{C}^2$. С точки зрения калибровочных теорий имеются соотношения раздутия Накаджимы-Ёшиоки на инстантонные статсуммы на $\mathbb{C}^2$ вида:

$$\beta_D \mathcal{Z}(a,\epsilon_1,\epsilon_2|z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}+j/2} \mathrm{D}\Big(\mathcal{Z}(a+2n\epsilon_1,\epsilon_1,-\epsilon_1+\epsilon_2|z), \mathcal{Z}(a+2n\epsilon_2,\epsilon_1-\epsilon_2,\epsilon_2|z)\Big), \quad j=0,1 \tag{0.5}$$

где D некоторый дифференциальный или q-разностный оператор, а β_D — некоторая несложная функция, возможно нулевая.

С другой стороны, с точки зрения теории представления алгебры Супер Вирасоро имеются соотношения на конформные блоки, которые более естественны с точки зрения уравнения Пенлеве, поскольку специализируются и сводятся к билинейным соотношениям на $c=1$ конформные блоки. С точки зрения калибровочных теорий это соотношения раздутия на инстантонные статсуммы на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ вида:

$$\tilde{\mathcal{Z}}(a,\epsilon_1,\epsilon_2|z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}+j/2} \mathrm{D}\Big(\mathcal{Z}(a+2n\epsilon_1,2\epsilon_1,-\epsilon_1+\epsilon_2|z), \mathcal{Z}(a+2n\epsilon_2,\epsilon_1-\epsilon_2,2\epsilon_2|z)\Big), \quad j=0,1 \tag{0.6}$$

Исключая собственно инстантонные статсуммы $\tilde{\mathcal{Z}}$ на $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$, мы получаем билинейные соотношения на инстантонные статсуммы. Вопрос: можем ли мы их вывести из соотношений Накаджимы-Ёшиоки? Собственно, в специальном случае $\epsilon_1+\epsilon_2=0$ мы получили нужные нам соотношения из Накаджимы-Ёшиоки в нашей последней статье в прошлом году. Но этот способ, по-видимому, не приспособить для общих ϵ_1,ϵ_2.

Поэтому мы сделали по-другому. Предположим, нам нужно доказать билинейное соотношение указанного выше типа. Мы сворачиваем его левую часть с $\mathcal{Z}(a,\epsilon_1+\epsilon_2,-2\epsilon_1|z)$ и получаем сумму слагаемых такого вида (в q-случае)

$$\sum_{m,n}\mathcal{Z}(a+2(\epsilon_1+\epsilon_2)m,\epsilon_1+\epsilon_2,-2\epsilon_1|q^dz)\mathcal{Z}(a+2(m\epsilon_2+n\epsilon_1),2\epsilon_1,-\epsilon_1+\epsilon_2|q^{-3d}z)\mathcal{Z}(a+2\epsilon_2(m+n),\epsilon_1-\epsilon_2,2\epsilon_2|q^dz) \tag{0.7}$$

Теперь применяем уравнения раздутия Накаджимы-Ёшиоки для первой пары статсумм, получаем билинейное выражение вида

$$\sum_{m'}\mathcal{Z}(a+2m'(\epsilon_1+\epsilon_2),\epsilon_1+\epsilon_2,-\epsilon_1+\epsilon_2|q^{-d}z)\mathcal{Z}(a+4m'\epsilon_2,\epsilon_1-\epsilon_2,2\epsilon_2|q^dz), \tag{0.8}$$

к которому вновь применяем уравнение раздутия Накаджимы-Ёшиоки и получаем статсумму $\mathcal{Z}(a,\epsilon_1+\epsilon_2,2\epsilon_2|z)$. У нас получается в итоге несколько этих статсумм с разными коэффициентами и оказывается, что сумма этих коэффициентов равна нулю. Поскольку у нас статсумма, а также левая часть искомого билинейного соотношения — это односторонний ряд по z, то равенство нулю свертки значит равенство нулю и билинейного выражения.

- Изучение автономного предела соотношений на $c=-2$ тау-функции. Из работы Берштейна-Гавриленко-Маршакова известно, что в случае автономного предела $q\to 1$ (без других рескалирований), тау-функция уравнения Пенлеве стремится к тэта-функции Якоби, а уравнения Пенлеве стремятся к тождествам Фэя. Нам хотелось понять, что происходит в нашем случае для $c=-2$ тау-функций. Получилось, что на уровне тау-функций Якоби мы получаем из равенства $\tau=\mathrm{\tau}^+\mathrm{\tau}^-$ тривиальное соотношение на тэта-функции $\theta(u;q)=\theta(u;q^2)\theta(uq;q^2)$ и получаемые билинейные соотношения на тэта-функции действительно оказываются тождествами Фэя.

В целом, пока что результаты исследований этого года не готовы к публикации, работа продолжается.

Статьи, вышедшие в этом году

[1]. M. Bershtein, A. Shchechkin, *Painleve equations from Nakajima-Yoshioka blowup relations*, [arXiv:1811.04050] Letters in Mathematical Physics 109 (11), (2019), 2359-2402

Доклады на конференциях, школах, семинарах

- *Колчанные многообразия Накаджимы: определение и примеры*, Весенняя школа по математической физике (1-7 мая, Ратмино, Дубна, 2019)
- *ABJM теория как ферми-газ*, Семинар "Современные проблемы математической физики"(Сколтех, Москва, 17 декабря 2018 и 11 февраля 2019)

Педагогическая активность

Учебный ассистент на курсе "Суперсимметричные калибровочные теории"в Сколтехе осенью 2019 года.

Краткий отчет за три года

Подведу итоги трехлетних исследований, сравнив их с заявкой по пунктам:

- *Симметрия w поверхностей из классификации Сакаи грубо говоря имеет вид $w:(Z,G)\mapsto(w(Z),w(G))$. Мы хотим перейти от буквы G, "равноправной" с Z к функции $G(Z)$, которая преобразовывалась бы согласованно с действием группы*

  $$w(G)(Z)=G(w(Z)). \tag{4.1}$$

  Именно в виду этого условия некоторое соотношение в группе становится уравнением Пенлеве $A_7^{(1)'}$ на функцию $G(Z)$. Но в последнем случае мы рассматриваем только подгруппу сдвигов $Z\mapsto q^2Z$ бесконечного порядка в группе симметрий. Тогда вопрос следующий – поднимается ли соотношение (4.1) до всей группы симметрии, которая равна $D_4\ltimes W(A_1^{(1)})$ Ответ такой, что соответствие есть, но только для двузначных функций $G(Z)$. Наша ближайшая задача – описать эту двузначность. После этого можно поднять полученный результат на уровень τ-функций, что уже сделано на уровне симметрий.

  Указанная двузначность оказалась характерной исключительно для данного уравнения иерархии Пенлеве, похоже, что особого интереса она не представляет.

- *Следующая задача – найти явное решение для $G(Z)$ (или то же самое $\tau(Z)$) для всех уравнений следующих из действия группы Вейля. На сегодня основная проблема здесь – это элементы группы симметрии, которые переводят $Z\mapsto Z^{-1}$. Для того чтобы нам подошла формула для тау-функции в виде ряда Фурье на конформные блоки нам нужны соотношения, связывающие q-конформные блоки с Z и Z^{-1}. Формулы такого типа известны для топологического вертекса (т.н. дуальность база-слой), разложение в формальный ряд по u и Z которого совпадает с разложением конформного блока. Однако в нашем секторе $|q|<1$ этот ряд не сходится к самому блоку, поэтому задание — попробовать "подправить"эту проблему.*

  Данная задача не решена и оказалась сложнее чем думалась. По-видимому, данную связь можно получить, изучая зеркальную симметрию топологического вертекса.

- *Естественная задача – обобщение на менее вырожденные Пенлеве. Исходя из непрерывного предела и исследованного случая $A_7^{(1)'}$ разумно было бы ожидать, что ответ для $A_{7-N}^{(1)}$, $N \leq 7$ дается 5d $SU(2)$ статсуммой Некрасова для калибровочной теории с N фундаментальными мультиплетами.*

  Данные вычисления были проделаны другими авторами.

  Более того, Зайберг утверждает, что данные теории имеют $W(E_{N+1})$ симметрию, а наши поверхности имеют $W(E_{N+1}^{(1)})$ симметрию. Было бы интересно понять, что значит это расширение симметрии с физической точки зрения.

  Задача остается.

- *Формула для q-деформированной тау-функции уравнения q-Painlevé $A_7^{(1)'}$ доказана с точностью до билинейных соотношений на конформные блоки. Их доказательство, видимо, можно получить из q-деформации разложения модуля Верма алгебры Супер Вирасоро, полученной в работах Фейгина, Джимбо, Мивы, Мухина.*

  Мы доказали, что указанные билинейные соотношения на конформные блоки следуют из соотношений раздутия Накаджимы-Ёшиоки на $\mathbb{C}^2$, таким образом, получив их доказательство иным способом. Другое дело, что теоретико-представленческое доказательство, видимо, тоже интересно.

- *Существует другой подход к q-деформированным Пенлеве – а именно q-деформация изомонодромной задачи. Теперь вопрос – как связана полученная τ-функция с этим подходом.* Мы начали работать над этим вопросом, но вскоре q-деформация изомонодромной задачи в терминах тау-функций была построена Джимбо-Нагоей-Сакаи.

  Более того, мы до сих пор не знаем, что концептуально значат билинейные уравнения на τ-функцию даже в непрерывном случае. Не знаем вообще мы и того, что значит случай билинейных соотношений с $c \neq 1$.

  Этот вопрос, висевший еще с 2013 года стал нашей основной деятельностью в последнее время. Мы обнаружили, что тау-функции, построенные как ряды Фурье от конформных блоков с центральными зарядами "минимальных моделей"$M(1,n)$ явно выделены, в частности тем, что имеют изомонодромный смысл, схожий с обычной $c = 1$ тау-функцией и связаны с уравнениям Пенлеве. Далее мы изучали простейший случай — $c = -2$ тау-функции (в непрерывном, а также q-деформированном случае), на которые разлагается обычная тау-функция как на множители. Мы обнаружили, что такое разложение естественно с разных точек зрения: с точки зрения различных билинейных соотношений на конформные блоки, с точки зрения фредгольмового детерминанта, с точки зрения теории представлений и т.д. Была также обнаружена неожиданная связь с $c = 1$ тау-функцией уравнения q-Пенлеве VI при специальном значении параметров, которая дала новое соотношение на пятимерные Некрасовские статсуммы.

  Тот же вопрос про ещё один подход – т.н. "singularity confiment который считается q-деформированным аналогом свойства Пенлеве и свойством дискретной интегрируемости. Суть его в том, что достижение бесконечности при дискретной эволюции все равно позволяет восстановить начальные условия. Небольшие продвижения в направлении дискретной интегрируемости есть: так было обнаружено, что при действии группы сдвигов бесконечного порядка на τ-функции наблюдается явление Лорана.

  Мы вскоре показали, что действие группы Вейля действительно дается мутациями некоторой кластерной алгебры. В дальнейшем я отошел от этой деятельности, эта связь была серьезно исследована в двух работах Берштейна-Гавриленко-Маршакова.

- *Когда станет понятна связь с изомонодромной задачей, следующим шагом будет обобщение на задачу Гарнье. В непрерывном случае соответствующие соотношения мы уже умеем выписывать, но до сих пор не умеем интерпретировать. Следующий шаг обобщения — матрицы ранга выше 2 в линейной задаче.*

  Этим мы в итоге не занимались.

- *Вопрос также в том, поднимается ли интерпретация ур. Пенлеве как неавтономных гамильтоновых систем на дискретный уровень. Удовлетворительный ответ на этот вопрос даст нам возможность попробовать получить q-деформацию Окамото-подобных уравнений.*

  Ответ на этот вопрос стал в какой-то степени ясен из работы Берштейн-Гавриленко-Маршаков, а именно, что динамика Пенлеве — это кластерная динамика, которая является симплектической и является деавтономизацией интегрируемых систем Гончарова-Кеньона. Однако прямого аналога гамильтониана для дискретной динамики у нас нет и непонятно, корректно ли это вообще поставленный вопрос.

- *Важной задачей связанной с изомонодромной задачей является представление τ-функции через фредгольмовы детерминанты. Недавно в работе Гавриленко-Лисового принципиальная конструкция такого представления была дана. Теперь стоит вопрос про q-деформацию.*

  В 2017 году несколько иное представление в виде фредгольмового детерминанта было получено для уравнения $A_7^{(1)'}$ Бонелли, Грасси и Танзини. Пользуясь связью этого детерминанта с ABJ теорией, описанной в этой статье, мы тоже получили представление в виде фредгольмового детерминанта для $c = -2$ тау-функции.

Кроме этого, было сделано также:

- Доказаны детерминантные формулы для $c = 1$ тау-функции и предъявлены пфаффианные формулы для $c = -2$ тау-функции при резонансном значении параметров.
- Написаны соотношения, выражащие $c = 1$ и $c = -2$ тау-функции в специальной точке через классические конформные блоки.
- Изучены свойства статсумм Некрасова с разным числом материй и с разным уровнем дополнительной теории Черн-Саймонса, а именно комбинаторные связи между статсуммами с разным уровнем теории Черн-Саймонса, а таже вопросы сходимости.
- Получено доказательство билинейных $\mathbb{C}^2/\mathbb{Z}_2$ соотношений раздутия из соотношений раздутия Накаджимы-Ёшиоки на $\mathbb{C}^2$.