ОТЧЕТ

Шрамова Константина Александровича
по гранту Фонда "Династия"

1. Результаты 2017 года

1.1. **Многообразие Кобла и конструкции рациональности для особых трехмерных квартик.** В 2017 году совместно с А. Кузнецовым и И. Чельцовым я изучал геометрию так называемого многообразия Кобла $\mathcal{Y}$, то есть двойного накрытия проективного пространства $\mathbb{P}^4$, заданного в $\mathbb{P}^5$ с однородными координатами $x_1, \ldots, x_6$ уравнением $x_1 + \ldots + x_6 = 0$, разветвленного в квартике Игусы, заданной уравнением

$$\left(x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 + x_5^4 + x_6^4\right) - \frac{1}{4}\left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2\right)^2 = 0.$$

На $\mathcal{Y}$ действует группа $\mathfrak{S}_6 \times \mathfrak{S}_2$; особое множество $\mathcal{Y}$ состоит из 15 кривых. Мы построили два малых разрешения особенностей многообразия $\mathcal{Y}$; одно из них эквивариантно относительно нестандартной подгруппы $\mathfrak{S}_4 \times \mathfrak{S}_2$ в $\mathfrak{S}_6$, а другое — относительно нестандартной подгруппы $\mathfrak{S}_5$. С помощью этих разрешений мы получили новый подход к проблеме рациональности для $\mathfrak{S}_6$-инвариантных квартик в $\mathbb{P}^4$. А именно, мы построили на каждой из этих квартик бирациональную структуру расслоения на коники над поверхностью дель Пеццо S степени 5, кривая вырождения которого лежит в пучке Вимана–Эджа $\mathfrak{A}_5$-инвариантных кривых из линейной системы $|-2K_S|$. После этого нам удалось получить новое доказательство нерациональности общих $\mathfrak{S}_6$-инвариантных квартик (ранее этот результат был доказан А. Бовилем другим способом), а также рациональность оставшихся специальных квартик (этот результат тоже был известен, но раньше в каждом случае требовалась отдельная конструкция рациональности).

1.2. **Эквивариантная бирациональная жесткость.** Вместе с И. Чельцовым я изучал вопрос об эквивариантной бирациональной жесткости трехмерного проективного пространства. Пусть X — многообразие Фано размерности n с терминальными особенностями. Предположим, что на X действует конечная группа G, причем ранг G-инвариантной группы классов дивизоров Вейля на X равен 1 (в этом случае X называется G-многообразием Фано). Многообразие X называется бирационально жестким, если оно не перестраивается ни в какое другое G-расслоение Мори; это значит, что не существует G-эквивариантного рационального отображения из X, слои которого рационально связны и имеют размерность, отличную от 0 и n, и кроме того не существует G-эквивариантных бирациональных перестроек X в другие G-многообразия Фано. Имеется большой набор мало связанных друг с другом результатов о G-бирациональной жесткости всевозможных многообразий Фано, а также большой набор конструкций, показывающих, что во многих важных случаях никакой бирациональной жесткости нет. В размерности 2 классификация G-бирационально жестких поверхностей дель Пеццо более-менее известна (не разобраны только несколько довольно скучных случаев, а во всех случаях с интересной геометрией ответ получен). Мы взяли в качестве X проективное пространство $\mathbb{P}^3$, которое допускает действие многих конечных групп (и при этом является G-многообазием

Фано для любого такого действия), и полностью изучили соответствующие группы с точки зрения бирациональной жесткости. Одной из причин заниматься именно трехмерным проективным пространством было то, что ровно 100 лет назад была опубликована книга Х. Ф. Блихфельда “Finite collineation groups”, в которой был дан полный и внятный обзор известных на то время результатов о конечных подгруппах груп $\mathrm{PGL}_n(\mathbb{C})$, и в частности полная классификация для $n = 4$; мы не смогли удержаться от того, чтобы отметить юбилей выхода этой замечательной книги, добавив к ее результатам немного современной бирациональной геометрии. Наша деятельность состояла в следующем. Мы доказали G-бирациональную жесткость $\mathbb{P}^3$ для всех примитивных подгрупп в $\mathrm{PGL}_4(\mathbb{C})$, для которых она еще не была известна, за исключением одного из классов сопряженности групп $\mathfrak{S}_5$; таких групп было довольно много, но все они разбились на два класса, каждый из которых обслуживался одним (довольно громоздким) рассуждением. Для оставшейся подгруппы $G \cong \mathfrak{S}_5$ мы придумали новую G-бирациональную перестройку в некоторое $\mathbb{P}^1$-расслоение над $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, чем опровергли G-бирациональную жесткость в этом случае. Наконец, в самом массовом случае импримитивных групп мы придумали другую перестройку в некоторое особое торическое многообразие Фано, показав таким образом, что в этом случае G-бирациональная жесткость тоже не имеет места.

1.3. **Альфа-инварианты и чисто лог-терминальные раздутия.** Вместе с И. Чельцовым и Дж. Парком я занимался чисто лог-терминальными раздутиями и их связью с альфа-инвариантами лог-многообразий Фано. Мы доказали следующее утверждение. Пусть $U \ni P$ — росток терминальной особенности. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "\rho"] \arrow[dr, "\phi"'] & & Y \arrow[dl, "\psi"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

где ϕ и ψ являются бирациональными морфизмами, исключительные множества которых — неприводимые дивизоры E_X и E_Y, отображающиеся в P. Предположим, что лог-пары (X, E_X) и (Y, E_Y) имеют чисто лог-терминальные особенности, дивизор $-(K_X + E_X)$ является ϕ-обильным, а дивизор $-(K_Y + E_Y)$ является ψ-обильным. Предположим также, что

$$\alpha\big(E_X, \mathrm{Diff}_{E_X}(0)\big) + \alpha\big(E_Y, \mathrm{Diff}_{E_Y}(0)\big) \geqslant 1.$$

Тогда отображение ρ является изоморфизмом. В частности, в данном случае единственна так называемая компонента Коллара (впрочем, этот результат уже был известен в большей общности). Также наша теорема является аналогом полученного ранее результата Дж. Парка об отсутствии послойных перестроек в между семействами многообразий, для которых сумма альфа-инвариантов центральных слоев строго больше 1.

1.4. **Nef-разбиения для полных пересечений во взвешенных проективных пространствах.** Вместе с В. Пржиялковским я занимался nef-разбиениями для взвешенных полных пересечений. Пусть X — взвешенное полное пересечение степеней $d_1, \ldots, d_k$ во взвешенном проективном пространстве $\mathbb{P}(a_0, \ldots, a_n)$. Nef-разбиением называется разбиение множества индексов $\{0, \ldots, n\}$ на подмножества $\Theta_0, \ldots, \Theta_k$, для которого $\sum_{i\in\Theta_t} a_i = d_t$ при всех $t = 1, \ldots, k$. В случае, если X является гладким хорошо сформированным многообразием Фано, существование nef-разбиения даёт простой способ построить слабую модель Ландау–Гинзбурга в виде явным образом выписываемого многочлена Лоарана. Существование nef-разбиения известно для гладких хорошо сформированных взвешенных гиперповерхностей Фано; предполагается, что оно существует для всех гладких хорошо сформированных взвешенных полных пересечений Фано. Мы доказали этот факт в случае коразмерности 2 (и передоказали его новым способом для гиперповерхностей), сведя вопрос к некоторому комбинаторному утверждению о графах.

2. Работы

2.1. **Препринты.** Были опубликованы препринты:

(1) Ivan Cheltsov, Jihun Park, Constantin Shramov, *Alpha-invariants and purely log terminal blow-ups*, arXiv:1709.05668
(2) Victor Przyalkowski, Constantin Shramov, *Nef partitions for codimension 2 weighted complete intersections*, arXiv:1702.00431

2.2. **Статьи.** Вышла из печати ранее написанная статья:

Ciro Ciliberto, Michal Farnik, Alex Küronya, Victor Lozovanu, Joaquim Roé, Constantin Shramov, *Newton–Okounkov bodies sprouting on the valuative tree*, Rend. Circ. Mat. Palermo (2), 66:2 (2017).

3. Участие в конференциях и семинарах

В 2017 году я принимал участие в следующих мероприятиях:

(1) Заседание Московского математического общества, МГУ, 21 февраля 2017, доклад "Конечные группы бирациональных автоморфизмов".
(2) Конференция "Dynamics in Siberia", Институт математики им. С. Л. Соболева (Новосибирск), 28 февраля – 4 марта 2017, доклад "Birational automorphisms".
(3) Семинар им. В. А. Исковских, МИАН, 16 марта 2017, доклад "Поверхности без точек и их автоморфизмы".
(4) Семинар по многомерному комплексному анализу (семинар Витушкина), МГУ, 29 марта 2017, доклад "Бирациональные автоморфизмы маломерных многообразий".
(5) Школа-конференция "Алгебра и теория чисел в Калининграде", БФУ им. И. Канта, 17–21 апреля 2017, цикл из двух докладов по теме "Кубические поверхности".
(6) Конференция "Recent developments in rationality questions", институт Шредингера (Вена, Австрия), 24-28 апреля 2017, доклад "Automorphisms of pointless surfaces".

(7) “Алгебра, алгебраическая геометрия и теория чисел”, конференция памяти академика И. Р. Шафаревича, 5 июня 2017, доклад “Группы бирациональных автоморфизмов”.
(8) Simons conference in mathematics and physical sciences, Нью-Йорк (США), 21–25 августа 2017, доклад “Finite groups of birational automorphisms”.
(9) Школа-конференция по алгебраической геометрии и комплексному анализу, САФУ (Коряжма), 25–30 августа 2017, цикл из трех лекций по теме “Группы бирациональных автоморфизмов”.
(10) Семинар по геометрии и топологии университета Глазго (Великобритания), 13 ноября 2017, доклад “Automorphisms of complex surfaces”.
(11) International conference on algebraic geometry, университет Цинхуа, Пекин (Китай), 8–10 декабря 2017, доклад “Rational nodal quartic threefolds”.

4. Организация конференций и семинаров

Я являюсь (совместно с Д. Орловым, Ю. Прохоровым и В. Пржиялковским) соруководителем семинара Исковских, проходящего в МИАН. Также являюсь (совместно с В. Никулиным, Д. Орловым, Ю. Прохоровым и В. Шокуровым) соруководителем учебного семинара по алгебраической геометрии в научно-образовательном центре МИАН. Принимал участие (совместно с Н. Курносовым и Ю. Прохоровым) в организации школы-конференции “Бирациональная геометрия в положительной характеристике” в ВШЭ 3–7 апреля 2017. Принимал участие (совместно с Ю. Прохоровым) в организации школы-конференции по бирациональной геометрии в ВШЭ 22–24 ноября 2017.