

Отчет за 2017 год

по гранту “Молодая математика России”

Анастасия Ставрова

1. РЕЗУЛЬТАТЫ НАУЧНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

1. Группы Шевалле–Демазюра от дискретных алгебр Ходжа. Группы Шевалле–Демазюра являются расщепимыми простыми алгебраическими группами; все простые алгебраические группы являются их скрученными формами. В частности, линейные группы матриц SL_n , Sp_n , SO_n являются группами Шевалле–Демазюра. В 2014 г. я доказала (обобщая более ранние результаты Э. Абе, А. Суслина, Б. Марго и др.), что любая односвязная группа Шевалле–Демазюра от кольца многочленов от нескольких переменных над полем порождена элементарными корневыми унипотентами, которые являются аналогами матриц элементарных преобразований 1 рода в SL_n . В 2017 году я обобщила этот результат на фактор-кольца кольца многочленов по идеалу, порожденному набором одночленов. Такие фактор-кольца называются дискретными алгебрами Ходжа, простейшим примером является кольцо $F[x, y]/xy$. Следующая теорема представлена в препринте [St2]. Для групп SL_n она была доказана Т. Форстом (1983).

Теорема 1. Пусть G – односвязная простая группа Шевалле–Демазюра ранга ≥ 2 , и пусть R – нетерово коммутативное кольцо. Если для любого $n \geq 1$ группа $G(R[x_1, \dots, x_n])$ порождается элементарными корневыми унипотентами, то для любой дискретной алгебры Ходжа A над R группа $G(A)$ тоже порождается элементарными корневыми унипотентами.

2. Нормальное строение изотропных простых алгебраических групп. Эта работа является текущим совместным проектом с А. В. Степановым, ожидаемые результаты которого были анонсированы еще в 2015 г. Ее целью является описание решетки нормальных подгрупп для изотропных простых алгебраических групп над коммутативными кольцами. Понятие изотропности простой алгебраической группы происходит от понятия изотропности для квадратичных форм; в частности, изотропный ранг $SO(q)$ равен индексу Витта формы q .

Классификация нормальных подгрупп изотропных простых алгебраических групп над коммутативным кольцом R к настоящему моменту известна для групп Шевалле–Демазюра (Э. Абе, 1989), ортогональных групп (Л. Васерштейн, 1988), унитарных групп (Д. Джанг, 2010), для арифметических групп (Г. Маргулис, 1974; М. С. Рагунатан, 1976). Грубо говоря, нормальные подгруппы параметризуются идеалами R . А именно, для любой нормальной подгруппы H существует единственный идеал I , такой что

$$E(R, I) \leq H \leq G^*(R, I),$$

где $E(R, I)$ – нормальное замыкание множества элементарных корневых унипотентов, сравнимых с 1 по модулю I , а $G^*(R, I)$ – множество элементов группы, которые центральны по модулю I .

В 2017 году мною был получен следующий результат в рамках этого проекта. Хотелось бы отметить, что доказательство этого факта для изотропных групп гораздо сложнее, чем для расщепимых групп (групп Шевалле–Демазюра), так как корневые подгруппы не являются одномерными, и потому их подмодули не обязательно задаются идеалами. Кроме того, над произвольным R невозможно провести редукцию к расщепимым подгруппам, как в арифметическом случае.

Теорема 2. *Пусть G – простая алгебраическая группа изотропного ранга ≥ 1 над коммутативным кольцом R , такая что над любой максимальной локализацией этого кольца изотропный ранг G хотя бы 2. Пусть H – нормальная подгруппа в $G(R)$. Если H содержит элементарный корневой унипотент, то H содержит нетривиальную подгруппу вида $E(R, I)$.*

Совместно с А. Степановым мы в 2017 г. доказали следующее утверждение, которое также является важным шагом к описанию нормальных подгрупп [StSt].

Лемма 1. *Пусть G – простая алгебраическая группа изотропного ранга ≥ 2 над R , H – нецентральная нормальная подгруппа в $G(R)$. Если H имеет нетривиальное пересечение с произведением двух параболических подгрупп G , то H имеет нетривиальное пересечение с одной параболической подгруппой.*

2. ПУБЛИКАЦИИ

- [St2] A. Stavrova, Non-stable K_1 -functors of discrete Hodge algebras, arXiv:1712.04907, 2017.
 [StSt] A. Stavrova, A. Stepanov, Normal structure of isotropic reductive groups, 2017, in preparation, 11 pp.

3. УЧАСТИЕ В КОНФЕРЕНЦИЯХ

- В 2017 г. приглашенные доклады на
- the international workshop "Lie Theory and Its Applications in Physics XXII", 19-25 June 2017, Varna, Bulgaria;
 - Первая летняя математическая школа на Фонтанке: Геометрия 2017, 3–8 июля 2017.

(В 2018 г. я приглашена на Oberwolfach workshop “Quadratic Forms and Related Structures over Fields”, 29 April – 5 May 2018, Oberwolfach, Germany; Banff workshop Affine Algebraic Groups, Motives and Cohomological Invariants, 16 Sept. – 21 Sept. 2018, Banff, Canada.)

4. ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

Руководство курсовой работой студента 2 курса Н. Елизарова новой программы бакалавриата “Математика” Санкт-Петербургского Государственного Университета. Ведение практических занятий по алгебре (1 семестр, 2 пары в неделю) в рамках этой программы.