Отчет за 2018 год

по гранту “Молодая математика России”

Анастасия Ставрова

1. Результаты научных исследований

1. Изотропные редуктивные группы над кольцами многочленов и дискретными алгебрами Ходжа. Одной из долгосрочных тем моих исследований является изучение главных G-расслоений и групп точек для изотропных редуктивных групп G над кольцами многочленов. Расщепимые редуктивные группы также называются групповыми схемами Шевалле — Демазюра или просто группами Шевалле; к ним относятся, в частности, линейные группы матриц SL_n, Sp_n, SO_n. Общие редуктивные группы являются скрученными формами групп Шевалле — Демазюра. Понятие изотропности редуктивной группы происходит от понятия изотропности для квадратичных форм; в частности, изотропный ранг $\mathrm{SO}(q)$ равен индексу Витта формы q.

В 1976 г. Д. Квиллен и А. Суслин независимо доказали гипотезу Серра о том, что любой конечно-порожденный проективный модуль (а значит, и любое главное GL_n-расслоение) над кольцом многочленов $k[x_1,\dots,x_n]$ над полем является свободным. Т. Форст (1983) заметил, что этот результат распространяется и на фактор-кольца колец многочленов по идеалам, порожденным одночленами. Такие фактор-кольца называются дискретными алгебрами Ходжа или кольцами Стэнли — Рейснера, простейшим примером является кольцо $k[x,y]/xy$. В 2018 году мною была доказана следующая теорема.

Теорема 1. [St1] *Пусть G — гладкая аффинная групповая схема над нетеровым коммутативным кольцом R. Если любое главное G-расслоение над любым кольцом многочленов $R[x_1,\dots,x_n]$ постоянно, т.е. является расширением главного G-расслоения над R, то любое главное G-расслоение над любой дискретной алгеброй Ходжа над R также расширено с R.*

В сочетании с известными результатами по гипотезе Гротендика—Серра о главных G-расслоениях (Н. Вавилов, И. Панин, А. Ставрова, 2015; И. Панин, Р. Федоров, 2015), эта теорема влечет следующее. Для любой изотропной редуктивной группы G над регулярным кольцом R, содержащим бесконечное поле, любое локально тривиальное главное G-расслоение над дискретной алгеброй Ходжа над R расширено с R [St1, Corollary 1.2].

Кроме того, в 1977 г. А. Суслин доказал, что

$$\mathrm{SL}_N(R[x_1,\dots,x_n]) = \mathrm{SL}_N(R)E_N(R[x_1,\dots,x_n])$$

для любого $N\ge 3$ и $n\ge 1$ и любого дедекиндова кольца R, где E_N — подгруппа в SL_N, порожденная матрицами элементарных преобразований I рода. В 1991 г. Ф. Грюневальдь, Й. Менникe и Л. Васерштейн распространили этот результат на симплектические группы. В 2018 г. мне удалось распространить этот результат на все остальные группы Шевалле — Демазюра (включая ортогональные группы SO_n, $n \geq 5$). Аналогом элементарных преобразований в таких группах являются так называемые элементарные корневые унипотенты.

Теорема 2. [St3] *Пусть G – группа Шевалле–Демазюра ранга ≥ 2, и пусть R — дедекиндово кольцо. Тогда $G(R[x_1,\ldots,x_n]) = G(R)E(R[x_1,\ldots,x_n])$ для любого $n \geq 1$, где $E(R[x_1,\ldots,x_n])$ — подгруппа в $G(R[x_1,\ldots,x_n])$, порожденная элементарными корневыми унипотентами.*

2. Нормальное строение изотропных редуктивных групп. В 2018 г. автор совместно с А. Степановым завершили описание решетки нормальных подгрупп для редуктивных групп изотропного ранга ≥ 2 над коммутативным кольцами [StSt]. Классификация нормальных подгрупп изотропных групп над коммутативным кольцом R до этого была известна для расщепимых редуктивных групп (Э. Абе, 1989), ортогональных групп (Л. Васерштейн, 1988), унитарных групп (Д. Джанг, 2010), для арифметических групп (Г. Маргулис, 1974; М. С. Рагунатан, 1976). Грубо говоря, нормальные подгруппы параметризуются идеалами R. Нами была доказана следующая теорема классификации.

Теорема 3. [StSt] *Пусть G - редуктивная группа над коммутативным кольцом R, имеющая изотропный ранг ≥ 2, и такая, что для любого максимального идеала $m \subseteq R$ структурные константы системы корней G_{R_m} обратимы в R. Тогда для любой нрмальной подгруппы $H \leq G(R)$ существует единственный идеал I в R, такой что*

$$E(R,I) \leq H \leq C(R,I),$$

где $E(R,I)$ – нормальное замыкание множества элементарных корневых унипотентов в $G(R)$, сравнимых с 1 по модулю I, а $C(R,I)$ – множество элементов $G(R)$, которые центральны по модулю I.

3. Простые 5-градуированные алгебры Ли, канторовы пары и структурируемые алгебры в характеристике 5. В 2008 г. А. Премет и Х. Штраде завершили классификацию конечномерных простых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от 2 и 3. А именно, такие алгебры Ли относятся к одному из трех типов: простые алгебры Шевалле (также называются классическими; в характеристике 0 других алгебр нет); простые алгебры картановского типа (существуют в характеристике >3) и алгебры Меликяна (в характеристике 5). Будем говорить, что конечномерная центральная простая алгебра над полем F является алгеброй типа Шевалле, если над алгебраическим замыканием F она совпадает с одной из простых алгебр Шевалле.

В моей совместной статье с Л. Болаэрт и Т. Де Метцем (2016) было доказано, что любая простая алгебра типа Шевалле над полем характеристики, отличной от 2 и 3, которая обладает нетривиальной $\mathbb{Z}$-градуировкой, строится по некоторой простой структурируемой алгебре при помощи обобщенной конструкции Титса-Кантора-Кехера. Структурируемые алгебры — это класс алгебр с инволюцией, который включает одновременно ассоциативные алгебры с инволюцией (в частности, кольца матриц) и йордановы алгебры. Классическая конструкция Титса-Кантора-Кехера строит 3-градуированные алгебры Ли по йордановым алгебрам, а обобщенная, открытая Б. Эллисоном, — 5-градуированные. К сожалению, обобщенная конструкция существует только в характеристике, не равной 2 и 3.

Нам с соавторами также удалось доказать и обратное — любая центральная простая алгебра Ли, построенная по структурируемой, является алгеброй типа Шевалле, но только в характеристике $\neq 2, 3, 5$, или когда структурируемая алгебра является алгеброй с делением. В 2018 году мною этот результат был доведен до завершения — было доказано следующее.

Теорема 4. [St2] *Следующие утверждения про центральную простую алгебру Ли L над полем характеристики $\neq 2, 3$ эквивалентны:*

- *L обладает нетривиальной 5-градуировкой;*
- *L является $\mathbb{Z}$-градуированной алгеброй Ли типа Шевалле;*
- *L строится по центральной простой структурируемой алгебре при помощи обобщенной конструкции Титса-Кантора-Кехера.*

Этот результат позволит завершить классификацию структурируемых алгебр и пар Кантора в характеристике 5. Классификация в характеристике > 5 была получена Б. Эллисоном (1978) и О. Смирновым (1992).

2. Публикации

[St1] A. Stavrova, *Isotropic reductive groups over discrete Hodge algebras*, J. Homotopy Relat. Str., 2018, https://link.springer.com/article/10.1007/s40062-018-0221-7.

[St2] A. Stavrova, *On the classification of Kantor pairs and structurable algebras in characteristic 5*, arXiv:1712.05288.

[St3] A. Stavrova, *Chevalley groups of polynomial rings over Dedekind domains*, arXiv:1812.04326.

[StSt] A. Stavrova, A. Stepanov, *Normal structure of isotropic reductive groups over rings*, arXiv:1801.08748.

3. Участие в конференциях

Приглашенные доклады в 2018 году:

- Automorphic Forms and Algebraic Geometry conference, May 14 – 18, 2018, St. Petersburg, Russia;
- Banff workshop Affine Algebraic Groups, Motives and Cohomological Invariants, Sept. 16 – 21, 2018, Banff, Canada;
- Geometry, Analysis, Groups conference, Oct. 1 – 5, 2018, St. Petersburg, Russia.

4. Педагогическая деятельность

В 2018 году прочитан лекционный курс “Алгебраические группы” для студентов 3 курса (1 семестр, 2 пары в неделю) в рамках новой программы бакалавриата “Математика” Санкт-Петербургского Государственного Университета.