Отчет за 2017 год.

Для конкурса Молодая Математика России.

Сергей Тихомиров

Принятые к печати и опубликованные работы

1. Fisher, T.; Petty, T.; Tikhomirov, S. Nonlocally maximal and premaximal hyperbolic sets. Modern theory of dynamical systems, 83–99, Contemp. Math., 692, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017.

2. Gurevich, Pavel; Tikhomirov, Sergey Rattling in spatially discrete diffusion equations with hysteresis. Multiscale Model. Simul. 15 (2017), no. 3, 1176–1197.

3. A. Scheel and S. Tikhomirov. Depinning asymptotics in ergodic media. In "Patterns of Dynamics Proceedings of "Patterns of Dynamics Berlin, 2017, Springer.

Подготовленные курсы

1. Разработан и прочитан курс "Эргодическая теория", содержащий введение в предмет для студентов владеющих базовыми знаниями по динамическим системам.

2. Разработан курс "Дифференциальные уравнения с гистерезисом". Несмотря на естесственность названия и обилие литературы по уравнениям в частных производных с оператором гистерезиса на данный момент практически отсутсвует литература по теме курса.

3. Проведена тематическая смена в образовательном центре "Сириус" по теме "Динамические системы". В основном рассматривалось логистическое отображение и аспекты возникающие при численном моделировании динамических систем.

Проведенные конференции

1. Проведена конференция "Dynamical Systems and Perturbations" посвященная 70-ти летию С.Ю. Пилюгина. 2-4 Октября, 28 докладчиков. http://pilyugin70.spb.ru/

Научная деятельность

Системы с гистерезисом

Продолжаются исследования начатые в [GT11]. Рассмотрим задачу термоконтроля: пусть Ω область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей, $u : \Omega \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ – темпаратура в области. Предположим, что на границе области расположен охлажающий-нагревающий прибор. При этом контроль происходит посредством условия Неймана, и решение выборе режима нагрев или охлаждение происходит посредством оператора гистерезиса типа неидеальное реле. Подобная система задается уравнениями

$$u_t = \Delta u, \quad x \in \Omega \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = K(x)\mathcal{H}(\hat{u}(\cdot))(t), \quad x \in \partial\Omega \tag{2}$$

дополненная начальными данными. В этой системе $K(x)$ соответсвует интенсивности нагревания, $\hat{u}$ – средняя температура в области, задаваемая линейным оператором (в дальнейшем мы рассмотрим конкретные примеры и не будем сейчас концентрироваться на строгости общей постановки). H – оператор гистерезиса типа неидеальное реле: для вещественно-значной функции $\hat{u}(t)$ оператор задается следующим образом, Рис. 1. Зафиксируем два пороговых значения $\alpha < \beta$ и два выхода $h_1 \neq h_{-1}$. Если $u(t) \leq \alpha$, то $\mathcal{H}(u)(t) = h_1$; если $u(t) \geq \beta$, то $\mathcal{H}(u)(t) = h_{-1}$; если $u(t)$ лежит между α и β, тогда $\mathcal{H}(u)(t)$ не меняет своего значения.

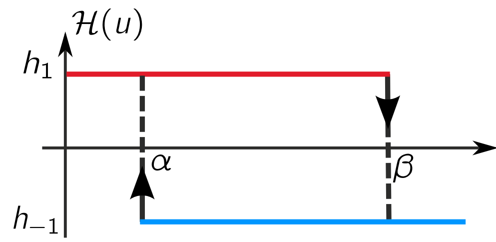

Рис. 1:: Hysteresis $\mathcal{H}$

Основной задачей является описание поведение решения при $t \to +\infty$ и поиском его устойчивых режимов. Наиболее естесственным является вопрос – верно ли, что решение сходится к периодической по t функции. В работе [GT11] было продемонстрировано, что это не всегда так. Более того, неизвестно всегда ли существует хотя бы одно перидическое решение у системы.

Сейчас совместно с П. Перстневой мы занимаемся изучением вопроса существования и устойчивости периодических решений в случае одномерного пространства. В таком случае $K(x)$ задается двумя числами, поскольку граница $\partial\Omega$ состоит из двух точек. Благодаря одномерности области $\partial\Omega$ так же удается расписать уравнения (1) в виде системы линейных уравнений

$$\dot{u}_n = -n^2 u + kH(\hat{u}(\cdot))(t), \quad n > 0.$$

Несмотря на кажущуюся простоту, уравнения связаны посредством оператора гистерезиса, что превращает задачу в нелинейную.

На данный момент для некоторых частных случаев удалось доказать существование периодического решения. Устойчивость решения сведена к спектальным свойствам некоторого одномерного возмущения сжимающего диагонального оператора. На данный момент нам удалось доказать, что все собственные числа оператора соответсвуют устойчивости. К сожалению, этого недостаточно, чтобы доказать устойчивость решения и требуются дополнительные свойства.

Отслеживание в логистическом отображении

Рассмотрим отображение
$$f(x) = ax(1-x)$$
при $a \in (0,4)$. При фиксированном $d > 0$ назовем d-псевдотраекторией последовательность $\{y_k\}$, удовлетворяющую неравенствам
$$|y_{n+1} - f(y_n)| < d, \quad n \in [0, N].$$
Основным вопросом является при каких условиях найдется точная траектория $\{x_n\}$, что выполнены неравенства
$$|x_n - y_n| < \varepsilon.$$
Т.е. рядом с приближенной траекторией найдется точная траектория. Эта задача называется “задачей об отследивании” и позволяет ответить на такие важные прикладные вопросы как влияние шума и ошибок округления при чисенном моделировании на свойства системы.

В совместной работе с М. Бабенко мы рассматриваем модель, где погрешности являются случайный величинами:
$$y_{n+1} = f(y_n) + d\xi_{n+1},$$
где ξ_n – являются случайными величинами равномерно распределенными на $[-1, 1]$. Выявлено две важных закономерности.

1. Очень резкие изменения ε при увеличении длины траектории.
2. Чрезвычайно точное соответствие между оптимальной точности отслеживания и оценкам, поученным автором в [T15].

Бегущие волны в стохастических дифференциальных уравнениях

Рассматривается задача
$$u_t = \Delta u + u - u^3 + F + dW_t,$$
где $u : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ и dW_t. В подобного рода задачах вопрос корректности постановки сложен – это модификация так называемой модели Φ_2^4.

Целью проекта является описание решений обобщающий тип “бешущая волна” и описание формы фронта. Ожидается, что он будет удовлетворять одномерному стохастическому дифференциальному уравнению.

Этот проект ведется совместно с C. Geldhauser.

Список литературы

[GT11] Gurevich, Pavel; Tikhomirov, Sergey. Symmetric periodic solutions of parabolic problems with discontinuous hysteresis. J. Dynam. Differential Equations 23 (2011), no. 4, 923–960.

[T15] Tikhomirov, Sergey. Holder shadowing on finite intervals. Ergodic Theory Dynam. Systems 35 (2015), no. 6, 2000–2016.