Отчёт по гранту фонда «Современная математика»

Дмитрий Зубов

1 Результаты, полученные в 2017 году

(1) **Скорость сходимости к равномерному распределению для неустойчивых многообразий диффеоморфизмов Аносова.** ⟨*совместный проект с Александром Буфетовым (Aix-Marseille Université, МИАН) и Себастьяном Гуэзелем (Université de Nantes, Université de Rennes 1)*⟩

Эта работа посвящена статистическим свойствам диффеоморфизмов Аносова. Диффеоморфизм Аносова – это диффеоморфизм (компактного) многообразия, разбивающий его касательное расслоение в каждой точке многообразия в прямую сумму двух подрасслоений, в одном из них векторы равномерно сжимаются, в другом – равномерно растягиваются под действием диффеморфизма. Указанные подрасслоения интегрируемы, и их интегральные кривые образуют два инвариантных слоения на многообразии, соответственно *устойчивое* и *неустойчивое*.

В своей кандидатской диссертации Г.А.Маргулис построил специальную меру μ^U на слоях неустойчивого слоения для C^2 гладких аносовских диффеоморфизмов, обладающую свойством равномерного растяжения под действием диффеоморфизма.

В настоящей работе мы построили конечномерное, инвариантное относительно диффеоморфизма подпространство потоков де Рама, задающих комплексные (не обязательно счётно-аддитивные) меры на подмножествах с C^1 гладкой границей в неустойчивом слоении. Кроме того, несмотря на то что голономия вдоль листов устойчивого всего лишь гёльдерова, удаётся сделать так, что образ подможнества в неустойчивом слое с C^1 гладкой границей под действием отображения голономии будет измерим относительно построенных мер, и мера образа совпадает с мерой исходного множества.

Построенные меры позволяют найти подробную асимптотику средних (по мере μ^U) по итерированным областям неустойчивых слоёв для C^3 гладких функций. Первый член асимпотики – это сама мера μ^U итерированной области, умноженная на интеграл рассматриваемой функции по мере максимальной энтропии (откуда следует классический результат Маргулиса и Аносова-Синая об асимптотическом равномерном распределении на неустойчивых слоях).

Каждый из следующих членов асимптотки является произведением некоторой конечно-аддитивной меры, чья скорость роста под действием диффеоморфизма имеет точную оценку в терминах собственного значения трансфер-оператора, и значения на функции f некоторой обобщённой функции, локально имеющей вид произведения потоков де Рама, задающих конечно-аддитивные меры.

В качестве следствия можно получить предельную теорему, в которой нормированные интегралы C^3 гладкой функции (с нулевым средним по мере максимальной энтропии) по итерациям единичных шаров неустойчивых слоёв (где слой выбирается случайно) гладкой области в неустойчивом слоении сходятся по распределению (как случайные величины) к некоторой конечно-аддитивной мере единичного шара.

(2) **Спектр Лагранжа и тейхмюллеровская динамика.**

Плоская поверхность – это риманова поверхность с дополнительно заданной на ней голоморфной 1-формой. Метрика на такой поверхности плоская, за исключением конических особенностей – нулей 1-формы. Конические особенности можно соединить седловыми связками – геодезическими в плоской метрике. Интегрируя 1-форму по всем седловым связкам, мы получаем множество (относительных) периодов плоской поверхности. Возьмём период минимальной длины.

На плоской поверхности X естественным образом действует группа $SL(2,\mathbb{R})$. Рассмотрим её диагональную подгруппу $\mathcal{F}_t$, и рассмотрим длину $s(\mathcal{F}_t X)$ наименьшего периода поверхности $\mathcal{F}_t X$. Нас интересуют числа вида

$$L(X) = \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{s(\mathcal{F}_t X)}.$$

Если предположить, что стабилизатор поверхности X является решёткой в $SL(2,\mathbb{R})$, то тогда всякая $SL(2,\mathbb{R})$-орбита в пространстве модулей будет замкнутой. Определим спектр Лагранжа $\mathcal{L}(X)$ поверхности X как множество всех значений $L(gX), g \in SL(2,\mathbb{R})$. В случае когда X является тором, его спектр Лагранжа совпадает с классическим спектром Лагранжа, связанным с диофантовыми приближениями иррациональных чисел.

Как и в классическом случае, известно, что спектр Лагранжа плоской поверхности имеет дискретную часть (однако состоящую, как правило единственной точки), а также содержит полупрямую - так называемый луч Холла. Остаётся неисследованной геометрическая структура промежуточной части спектра, находящейся между дискретной частью и лучом Холла.

Для плоских поверхностей, являющихся конечными разветвлёнными накрытиями тора, удалось найти подмножество спектра, являющееся канторовым совершенным множеством. Вопреки предположению, высказанному в работе Юбера-Маркезе-Лельевра-Ульчиграи, это множество не является орбитой действия фактора $SL(2,\mathbb{Z})$ по стабилизатору поверхности.

Работа над данным проектом ещё не закончена; предстоит исследовать, как устроена хаусдорфова размерность подмножеств промежуточной части спектра.

2 Опубликованные и поданные в печать работы

Alexander Bufetov, Sébastien Gouëzel, Dmitry Zubov. Rate of equidistribution for the unstable manifolds of Anosov diffeomorphisms. *Препринт, в ближайшее время будет выложен в arXiv.*

3 Участие в конференциях и школах

(1) Тематический месяц по динамическим системам, CIRM (Люмини, Франция), 30 января – 3 марта

(2) Школа 'Analytical aspects of hyperbolic flows', Centre Henri Lebesgue (Нант, Франция), 3–7 июля

(3) Конференция 'Function theory and dynamics of point processes', Институт имени Л. Эйлера (Санкт-Петербург), 1–3 июня

(4) Школа и конференция 'Integrable Models in Statistical Mechanics, Limit Shapes and Combinatorics', Институт имени Л. Эйлера (Санкт-Петербург), 31 июля – 11 августа

4 Работа в научных центрах и международных группах

С февраля по май 2017 находился в стажировке в Aix-Marseille Université (Марсель, Франция).

5 Педагогическая деятельность

Преподавал математику (в том числе и олимпиадную) на летней школе Лицея «Вторая школа», проходившей в Университете Иннополис, республика Татарстан, с 25 июня по 14 июля 2017 года. С октября 2017 года являюсь преподавателем-ассистентом в Лицее «Вторая школа».