ОТЧЕТ ДЛЯ КОНКУРСА «МОЛОДАЯ МАТЕМАТИКА РОССИИ» ЗА 2018 ГОД.

АЛЕКСЕЙ СЕРГЕЕВИЧ АНАНЬЕВСКИЙ

1. Результаты, полученные в 2018 году

В 2018 году я в основном исследовал различные свойста SL-ориентированных теорий когомологий и пытался их приложить к изучению спектра алгебраических ориентированных кобордизмов MSL. Один из хорошо известных способов доказать классический изоморфизм

$$\mathrm{MSO}^* \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}] \cong \mathbb{Z}[\tfrac{1}{2}][x_4, x_8, x_{12}, \ldots]$$

основан на детальном анализе спектральных последовательностей Адамса для всех простых p. Применимость этого подхода в первую очередь основана на следующих двух ингредиентах:

(1) MSO-ориентированность сингулярных когомологий (т.е. наличие изоморфизмов Тома и характеристических классов для ориентированных векторных расслоений) и простое вычисление $H^*(BSO_n, \mathbb{Z}/p)$ для нечётных p,
(2) знание коопераций для сингулярных когомологий, т.е. коалгебры Стинрода.

В мотивном контексте на настоящий момент рассматриваются 3 основных версии теорий когомологий, которые могут называться «ординарными» теориями когомологий: мотивные когомологии $\mathrm{H}\mathbb{Z}$ (определённые Воеводским), мотивные Милнор-Витт когомологии $\widetilde{\mathrm{H}\mathbb{Z}}$ (некоторое квадратичное оснащение мотивных когомологий, определённое Фазелем и Кальме) и $\mathbb{A}^1$-когомологии $\mathrm{H}_{\mathbb{A}}\mathbb{Z}$, представленные наивной линеаризацией мотивного сферического спектра (их интерпретация в терминах фрейм-соответствий была дана Гаркушей и Паниным). К сожалению, как оказалось, ни один из этих трёх вариантов когомологий пока что не даёт подходящего способа выписать мотивный вариант спектральной последовательности Адамса, позволивший бы проанализировать кольцо коэффициентов MSL. А именно, они обладают следующими недостатками.

(1) Для мотивных когомологий $\mathrm{H}\mathbb{Z}$ оба указанных выше ингредиента имеют место, но спектральная последовательность Адамса не видит η-периодическую часть MSL, которая как раз представляет наибольший интерес.
(2) Для мотивных Милнор-Витт когомологий $\widetilde{\mathrm{H}\mathbb{Z}}$ доступен первый ингредиент, т.е. имеют место SL-ориентированность и простые вычисления

$\widetilde{\mathrm{H}\mathbb{Z}}^{*,*}(\mathrm{BSL}_n)[\eta^{-1}]$ (эти результаты были получены мною в предыдущие годы), однако неизвестна алгебра коопераций.

(3) Для $\mathbb{A}^1$-когомологий $\mathrm{H}_{\mathbb{A}}\mathbb{Z}$ известна алгебра коопераций (т.е. есть второй ингредиент), однако они не допускают SL-ориентации и нет вычислений $\mathrm{H}_{\mathbb{A}}\mathbb{Z}^{*,*}(\mathrm{BSL}_n)[\eta^{-1}]$.

Хочется подчеркнуть, что алгебра коопераций для $\widetilde{\mathrm{H}\mathbb{Z}}$ на настоящий момент именно неизвестна, и разными коллективами авторов ведётся работа в этом направлении, что в будущем всё-таки может позволить применить спектральную последовательность Адамса, основанную на $\widetilde{\mathrm{H}\mathbb{Z}}$, тогда как $\mathbb{A}^1$-когомологии $\mathrm{H}_{\mathbb{A}}\mathbb{Z}$ именно не могут быть SL-ориентированы, в этом году мною была доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть k – совершенное поле. Тогда биградуированная теория когомологий $\mathrm{H}_{\mathbb{A}}\mathbb{Z}^{*,*}$, представленная линеаризацией сферического спектра $\mathbb{Z}[\mathbb{S}] \in \mathcal{SH}(k)$, не допускает нормализованной SL-ориентации.*

Параллельно была получена теорема, позволяющая построить SL-ориентацию на некотором классе теорий когомологий.

Теорема 2. *Пусть k – совершенное поле и $A \in \mathcal{SH}(k)$ – коммутативный кольцевой спектр. Предположим, что $A^{0,0} = [-, A]$ – пучок в топологии Зарисского. Тогда существует единственная нормализованная SL-ориентация на биградуированной теории когомологий $A^{*,*}$.*

Эта теорема покрывает широкий класс известных примеров SL-ориентированных теорий когомологий, в том числе мотивные когомологии, мотивные Милнор-Витт когомологии, алгебраические MGL-кобордизмы и когомологии с коэффициентами в гомотопических модулях.

Мотивные Милнор-Витт когомологии и $\mathbb{A}^1$-когомологии $\mathrm{H}_{\mathbb{A}}\mathbb{Z}$ могут быть описаны в терминах линейных комбинаций соответствий с дополнительными данными. Грубо говоря, в первом случае рассматриваются соответствия с тривиализацией (относительного) канонического расслоения, тогда как во втором случае рассматриваются соответствия с тривиализацией стабильного нормального расслоения. Соответствия с такими дополнительными данными порождают категории соответствий, которые ведут к триангулированным категориям мотивов, называемым категорией Милнор-Витт мотивов $\widetilde{\mathrm{DM}}(k)$ и категорией фрейм-мотивов $\mathrm{DM}^{\mathrm{fr}}(k)$ соответственно. Имеет место естественный функтор $\mathrm{DM}^{\mathrm{fr}}(k) \to \widetilde{\mathrm{DM}}(k)$, который в приведённом выше приближённом описании индуцирован взятием определителя нормального расслоения. Вообще говоря категории Милнор-Витт мотивов и фрейм-мотивов структурно сильно различаются, как показывает сформулированная ранее Теорема 1: для Милнор-Витт мотивов имеют место изоморфизмы Тома для ориентированных векторных расслоений, тогда как для фрейм-мотивов таких изоморфизмов вообще говоря нет. Тем не менее, в совместной с А. Нешитовым работе мы получили следующие результаты, сравнивающие эти категории.

Теорема 3. *Пусть k – бесконечное совершенное поле. Тогда естественный функтор $\mathrm{DM}^{\mathrm{fr}}(k) \to \widetilde{\mathrm{DM}}(k)$ индуцирует изоморфизм на сердцевинах гомотопических t-структур. В частности, категории гомотопических модулей, гомотопических модулей с Милнор-Витт трансферами и гомотопических модулей с фрейм-трансферами эквивалентны.*

Теорема 4. *Пусть k – бесконечное совершенное поле. Тогда любой сигма-стабильный гомотопически инвариантный пучок с $\mathbb{Z}\mathrm{F}$-трансферами допускает единственную структуру предпучка с Милнор-Витт трансферами, согласованными с $\mathbb{Z}\mathrm{F}$-трансферами.*

2. Опубликованные и поданные в печать работы

(1) Alexey Ananyevskiy, Andrei Druzhinin, *Rigidity for linear framed presheaves and generalized motivic cohomology theories,* Advances in Mathematics, 333 (2018), 423-462.
(2) Alexey Ananyevskiy, *On the zeroth stable $\mathbb{A}^1$-homotopy group of a smooth curve,* Journal of Pure and Applied Algebra, 222:10 (2018), 3195-3218.
(3) Alexey Ananyevskiy, Alexander Neshitov, *Framed and MW-transfers for homotopy modules,* arXiv:1710.07412v2 (текст был полностью переписан в марте 2018).

3. Доклады на конференциях и семинарах

(1) «Non-vanishing sections of algebraic vector bundles and characteristic classes», Geometry and Topology Seminar, Университет Осло, Осло, Норвегия, 24 октября 2018.
(2) «On the linear categories of motives», Workshop Motivic homotopy groups of spheres III, Технический университет Берлина, Берлин, Германия, 25 – 29 июня 2018.
(3) «SL-oriented cohomology theories», Workshop Motivic homotopy theory and refined enumerative geometry, Университет Дуйсбург-Эссена, Эссен, Германия, 14 – 18 мая 2018.
(4) «Framed and Milnor–Witt transfers for homotopy modules», Geometry and Topology Seminar, Университет Осло, Осло, Норвегия, 6 марта 2018.

4. Организационная, административная и педагогическая деятельность

(1) Один из организаторов двухнедельной школы-конференции «Motives in St. Petersburg 2018», 3 – 14 сентября 2018, ММИ им. Эйлера, Санкт-Петербург, Россия. Организаторы: А.С. Ананьевский, Г.А. Гаркуша, И.А. Панин.

(2) Один из организаторов двухдневного молодёжного семинара «Московско–Петербургский молодёжный симпозиум по алгебраической геометрии», 10 – 11 мая 2018, лаборатория им. П.Л. Чебышёва, СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия. Организаторы: А.С. Ананьевский, В.А. Гриценко, П.Г. Зограф.
(3) Организовывал семинары по $\mathbb{A}^1$-топологии, K-теории и алгебраической геометрии в лаборатории им. Чебышева.
(4) Учёный секретарь лаборатории им. П.Л. Чебышёва.
(5) Зам. директора ММИ им. Эйлера.