ОТЧЕТ ДЛЯ КОНКУРСА «МОЛОДАЯ МАТЕМАТИКА РОССИИ» ЗА 2019 ГОД.

АЛЕКСЕЙ СЕРГЕЕВИЧ АНАНЬЕВСКИЙ

1. Результаты, полученные в 2019 году

В 2019 году я продолжил исследование свойств слабо ориентированных обобщённых мотивных теорий когомологий, т.е. теорий когомологий, которые обладают изоморфизмами Тома только для векторных расслоений, допускающих некоторую дополнительной структурой, причём изоморфизмы Тома, вообще говоря, зависят от выбора этой дополнительной структуры. Основным примером слабой ориентации является SL-ориентация, которая постулирует существование изоморфизмов Тома для векторных расслоений с тривиализованной старшей внешней степенью (ориентированных расслоений). К SL-ориентированным мотивным теориям когомологий относятся, в частности, группы Чжоу-Витта (аналог когомологий с целыми коэффициентами в топологии) и эрмитова K-теория (аналог вещественной K-теории в топологии).

Оказывается, что для примеров, приведённых выше, можно построить изоморфизмы Тома в несколько более общей ситуации, а именно, для векторных расслоений, старшая внешняя степень которых является тензорным квадратом некоторого линейного расслоения. Структурная группа таких расслоений обозначается SL^c и её можно описать следующим образом:

$$\mathrm{SL}^c_n(R) = \left\{(x, g) \in R^* \times \mathrm{GL}_n(R) \,|\, x^2 \cdot \det g = 1\right\}.$$

Несложно видеть, что для вещественных точек имеется каноническое разложение

$$\mathrm{SL}^c_n(\mathbb{R}) = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+ \times \{\pm 1\},$$

где $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})^+$ — группа вещественных матриц $n \times n$ с положительным определителем, поэтому с вещественной точки зрения SL^c-расслоения и ориентированные расслоения — одно и то же с точностью до 2-кручения в группе Пикара (которое отвечает за разные выборы корня из линейного расслоения). Отметим, что на уровне комплексных точек такое разложение не имеет места, и уже даже в ранге 1, т.е. для линейных расслоений, имеется много нетривиальных SL^c-расслоений, тогда как ориентированное линейное расслоение тавтологически тривиально. Тем не менее, когомологические понятия SL и SL^c-ориентаций оказываются тесно связаны, а именно, мною была доказана следующая теорема:

Теорема 1. *Представимая в мотивной стабильной гомотопической категории теория когомологий допускает изоморфизмы Тома для ориентированных расслоений тогда и только тогда, когда она допускает изоморфизмы Тома для векторных расслоений со структурной группой SL^c.*

Помимо этого, полученные ранее утверждения о классах Понтрягина в мотивном контексте были перенесены со случая ориентированных расслоений на произвольные расслоения, в частности, доказана следующая теорема в η-периодическом контексте. Напомнинм, что стабильный элемент Хопфа η в мотивной теории гомотопий соответствует стабилизации двулистного накрытия окружности в классической топологии, а η-периодические мотивные теории когомологий соответствует классическим теориям когомологий с обращённой 2 в коэффициентах.

Теорема 2. *Для η-периодической SL-ориентированной теории когомологий классы Понтрягина обладают следующими свойствами.*

(1) $p_t(E \oplus E') = p_t(E)p_t(E')$ *для векторных расслоений E, E' и полного класса Понтрягина p_t.*
(2) $p_i(E) = 0$ *для векторного расслоения E ранга n и $i > \frac{n}{2}$.*

Были получены некоторые результаты об η-кручении для SL-ориентированных теорий когомологий, в частности:

Теорема 3. *Для SL-ориентированной теории когомологий и ориентированного векторного расслоения E, допускающего подрасслоение нечётного ранга, выполняется*

$$\eta \cdot e(E) = 0,$$

где $e(E)$ — класс Эйлера расслоения E.

Это теорема является мотивным аналогом классического утверждения о том, что класс Эйлера (со значениями в целочисленных когомологиях) векторного расслоения нечётного ранга является 2-кручением.

Кроме того, в совместной работе с П.А.Оствaером и О.Рёндигсом были получены результаты об очень эффективном накрытии спектра эрмитовой K-теории. Эрмитова K-теория является мотивным аналогом вещественной K-теории, а её очень эффективное накрытие — один из вариантов связного накрытия, т.е. аналог спектра ko. В мотивной стабильной гомотопической теории стабилизация происходит одновременно в двух направлениях, относительно симплициальной окружности S^1 и относительно алгебраической окружности $\mathbb{G}_m$. Соответственно понятие связности можно рассматривать

(1) в S^1-направлении, что ведёт к понятию гомотопической t-структуры, которое связано со спектральными последовательностями типа Брауна-Герстена-Квиллена;

(2) в $\mathbb{G}_m$-направлении, что ведёт к понятию слайс-фильтрации, использованной В. Воеводским для построения мотивной спектральной последовательности Атьи-Хирцебруха;
(3) диагонально, т.е. одновременно в симплициальном и алгебраическом направлениях, что ведёт к понятнию очень эффективного накрытия.

В нашей работе мы показали, что реализация Бетти переводит очень эффективное накрытие kq спектра эрмитовой K-теории в связное накрытие вещественной K-теории, вычислили слайсы ($\mathbb{G}_m$-аналог этажей башни Постникова) спектра kq, а также мотивные когомологии $\mathrm{H}^{*,*}(\mathrm{kq}; \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ в терминах мотивной алгебры Стинрода.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

(1) Alexey Ananyevskiy, *SL-oriented cohomology theories*, to appear in Contemporary Mathematics (2019)
(2) Alexey Ananyevskiy, Oliver Röndigs, Paul Arne Østvær, *On very effective hermitian K-theory*, published online in Mathematische Zeitschrift (2019)
(3) Alexey Ananyevskiy, Alexander Neshitov, *Framed and MW-transfers for homotopy modules*, Selecta Mathematica, 25:26 (2019)

3. Доклады на конференциях и семинарах

(1) «Клеточные структуры на однородных алгебраических многообразиях», зимняя научная школа «Анализ, геометрия и математическая физика», СПбГУ, Санкт-Петербург, 16 – 20 декабря 2019.
(2) «Мотивная клеточная структура на некоторых однородных многообразиях», Мемориальная конференция «Теория чисел и геометрия» памяти Алексея Зыкина, НМУ, Москва, 20 июня 2019.
(3) «SL-oriented cohomology theories», конференция «Algebro-geometric and homotopical methods», институт Миттаг-Лёффлера, Стокгольм, Швеция, 6 – 10 мая 2019.
(4) «Мотивы гладких алгебраических многообразий», семинар Шафаревича, МИАН, Москва, 19 февраля 2019.

4. Организационная, административная и педагогическая деятельность

(1) Один из организаторов трёхнедельной программы «Algebraic Groups and Motives», 26 августа – 13 сентября 2019, ММИ им. Эйлера, Санкт-Петербург, Россия.
(2) Организовывал семинары по $\mathbb{A}^1$-топологии, K-теории и алгебраической геометрии в лаборатории им. Чебышева.
(3) Учёный секретарь лаборатории им. П.Л. Чебышёва (до ноября 2019 года).
(4) Зам. директора ММИ им. Эйлера.