ОТЧЕТ ДЛЯ КОНКУРСА «МОЛОДАЯ МАТЕМАТИКА РОССИИ» ЗА 2020 ГОД.

АЛЕКСЕЙ СЕРГЕЕВИЧ АНАНЬЕВСКИЙ

1. Результаты, полученные в 2020 году

В 2020 году я в основном занимался вопросами, связанными с $\mathbb{A}^1$-Эйлеровой характеристикой многообразий торов. $\mathbb{A}^1$-Эйлерова характеристика — это некоторый инвариант, ставящий в соответствие каждому гладкому алгебраическому многообразию X над полем k элемент $\chi^{\mathbb{A}^1}(X)$ в кольце Гротендика–Витта симметричных билинейных форм $\mathrm{GW}(k)$ над полем k. Этот инвариант обобщает понятие классической топологической Эйлеровой характеристики, а именно, для гладкого многообразия над полем $\mathbb{C}$ имеет место равенство

$$\chi^{\mathbb{A}^1}(X) = \chi^{\mathrm{top}}(X(\mathbb{C})) = \sum_i (-1)^i \dim \mathrm{H}^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{R}),$$

а для гладкого многообразия X над полем $\mathbb{R}$ имеют место равенства

$$\operatorname{rank} \chi^{\mathbb{A}^1}(X) = \chi^{\mathrm{top}}(X(\mathbb{C})), \quad \operatorname{sgn} \chi^{\mathbb{A}^1}(X) = \chi^{\mathrm{top}}(X(\mathbb{R})).$$

Здесь $X(\mathbb{C})$ и $X(\mathbb{R})$ обозначают топологические пространства комплексных и вещественных точек многообразия с сильной (Евклидовой) топологией, а rank и sgn — ранг и сигнатура симметрической билинейной формы над вещественными числами.

Само определение $\mathbb{A}^1$-Эйлеровой характеристики даётся на категорном языке (это категорная Эйлерова характеристика $\Sigma^\infty_{\mathrm{T}} X_+$, рассмотренного как объект мотивной стабильной гомотопической категории $\mathcal{SH}(k)$), и на настоящий момент нет рецепта, как её вычислить для произвольного гладкого многообразия над полем k, хотя для проективных многообразий имеется изящная формула в терминах когомологий Ходжа, предложенная Марком Левинем и Арпоном Ракситом.

Помимо того, что $\mathbb{A}^1$-Эйлерова характеристика является интересным инвариантом сама по себе, её можно использовать для изучения локально тривиальных в топологии Нисневича расслоений. А именно, для такого расслоения $p\colon Y \to X$ со слоем F мотивный трансфер Бекера–Готтлиба $\mathrm{Tr}_p\colon \Sigma^\infty_{\mathrm{T}} X_+ \to \Sigma^\infty_{\mathrm{T}} Y_+$ является сечением для морфизма $\Sigma^\infty_{\mathrm{T}} p_+\colon \Sigma^\infty_{\mathrm{T}} Y_+ \to \Sigma^\infty_{\mathrm{T}} X_+$ в категории $\mathcal{SH}(k)$ при условии, что $\mathbb{A}^1$-Эйлерова характеристика $\chi^{\mathbb{A}^1}(X)$ является обратимым элементом кольца $\mathrm{GW}(k)$. В случае $F = G/H$ однородного многообразия под действием группы G это представляет особенный интерес, поскольку указаная процедура может быть использована для доказательства обобщённого принципа расщепления, позволяющего редуцировать G-торсор к H-торсору без потери когомологической информации. В этом контексте Марком Левинем была сформулирована следующая гипотеза (сильную форму он аттрибутировал Фабьену Морелю):

Гипотеза. *Пусть G — расщепимая редуктивная группа над совершенным полем k, $T \le G$ — расщепимый максимальный тор, $N = N_G(T)$ — нормализатор T в G. Тогда*

[Сильная форма] $\chi^{\mathbb{A}^1}(G/N) = 1$,
[Слабая форма] $\chi^{\mathbb{A}^1}(G/N)$ *является обратимым элементом* $\mathrm{GW}(k)$.

Отметим, что многообразия G/N аффинные, и для них, как я указал выше, на настоящий момент нет общего способа вычисления $\mathbb{A}^1$-Эйлеровой характеристики.

В той же статье, где приведённая гипотеза была сформулирована, Марк Левин доказал сильную форму для групп SL_2 и GL_2, а также слабую форму для групп SL_n и GL_n над полем характеристики 0. Затем Рой Джошуа и Пабло Пелаес доказали сильную форму гипотезы при условии, что -1 является квадратом в поле k. Мною же в этом году была получена следующая теорема, которая доказывает слабую форму гипотезы без каких-либо ограничений на поле, а также обобщает её и на не обязательно расщепимые группы.

Теорема. *Пусть G — редуктивная группа над полем k, $T \le G$ — максимальный тор, $N = N_G(T)$ — нормализатор T в G. Тогда имеет место следующее.*

1. *Если* $\operatorname{char} k = 0$, *то* $\chi^{\mathbb{A}^1}(G/N)$ *обратима.*
2. *Если* $\operatorname{char} k = p \neq 0$, *то* $\chi^{\mathbb{A}^1}_{\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]}(G/N)$ *обратима.*
3. *Если* $\operatorname{char} k = p \neq 0$ *и G/N строго дуализуемо, то* $\chi^{\mathbb{A}^1}(G/N)$ *обратима.*

Появление в положительной характеристике коэффициентов $\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]$ или предположения о строгой дуализуемости — чисто технический момент, поскольку без таких предположений в положительной характеристике $\mathbb{A}^1$-Эйлерова характеристика просто не определена.

Как следствие был получен следующий обобщённый принцип расщепления.

Следствие. *Рассмотрим локально тривиальный в топологии Нисневича G-торсор $\mathscr{G} \to X$ над гладким многообразием X над полем k. Пусть G — редуктивная группа над k, $T \le G$ — максимальный тор, $N = N_G(T)$ — нормализатор T в G. Рассмотрим обобщённую теорию когомологий $A^{*,*}(-)$, представимую в мотивной стабильной гомотопической категории $\mathcal{SH}(k)$, и предположим, что выполняется одно из условий:*

- $\operatorname{char} k = 0$,
- $\operatorname{char} k = p \neq 0$ *и либо G/N строго дуализуемо, либо $A^{*,*}(X)$ не имеет p-кручения.*

Тогда найдётся гладкое многообразие $Y \in \mathcal{S}m_k$ и морфизм $p\colon Y \to X$ такой, что

1. *G-торсор $p^*\mathscr{G}$ индуцирован с N-торсора,*
2. *гомоморфизм обратного образа $p^A\colon A^{*,*}(X) \to A^{*,*}(Y)$ инъективен.*

В случае $G = \mathrm{GL}_n$ это является вариантом классического принципа расщепления, а именно, для GL_n -торсора условие, что он индуцирован с N-торсора, равносильно тому, что ассоциированное векторное расслоение допускает разложение в прямую сумму линейных расслоений над накрытием Галуа базы со структурной группой S_n, переставляющей линейные расслоения, т.е., грубо говоря, векторное расслоение почти раскладывается в сумму линейных — раскладывается с точностью до того, что мы никак не можем различить эти слагаемые (но можем различить их над накрытием Галуа базы).

Доказательство теоремы основано на (1) сведении общего случая к алгебраически замкнутому или вещественно замкнутому полю, (2) классификации полупростых групп над вещественно замкнутыми полями, (3) вычислении ℓ-адических когомологий многообразия G/N над алгебраически замкнутым полем, (4) изучении вещественных точек многообразия G/N и применении к нему классических результатов о компактных группах Ли.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

(1) Alexey Ananyevskiy, *On the $\mathbb{A}^1$-Euler characteristic of the variety of maximal tori in a reductive group*, arXiv:2011.14613
(2) Alexey Ananyevskiy, *Thom isomorphisms in triangulated motivic categories*, принята в журнал Algebraic and Geometric Topology
(3) Alexey Ananyevskiy, *SL-oriented cohomology theories*, Motivic Homotopy Theory and Refined Enumerative Geometry, Contemporary Mathematics, 745 (2020), 1-20
(4) Alexey Ananyevskiy, Oliver Röndigs, Paul Arne Østvær, *On very effective hermitian K-theory*, Mathematische Zeitschrift, 294 (2020), 1021-1034

3. Доклады на конференциях и семинарах

(1) Доклады «Motivic second Hopf map as an obstruction to symplectic orientation», онлайн-семинар по $\mathbb{A}^1$-топологии, мотивам и K-теории, 1 и 15 октября 2020.
(2) Доклад «On the $\mathbb{A}^1$-Euler characteristic of the variety of maximal tori», онлайн-конференция «Motivic Geometry», организованная CAS, Oslo (Norway), 7–11 сентября 2020.
(3) Доклад «Трансферы в мотивной теории гомотопий», Общеинститутский математический семинар ПОМИ, 28 мая 2020.

4. Прочее

(1) 6–14 марта принимал участие в тематической программе «K-Theory, Algebraic Cycles and Motivic Homotopy Theory», организованной в Isaac Newton Institute, Cambridge. Изначально предполагалось, что я там пробуду до конца апреля, но из-за пандемии программа была остановлена.
(2) Организовывал онлайн-семинар по $\mathbb{A}^1$-топологии, мотивам и K-теории в Zoom, https://indico.eimi.ru/category/12.
(3) Зам. директора ММИ им. Эйлера.
(4) Руководитель гранта РНФ №20-41-04401 «Спектры алгебраических бордизмов: вычисления, фильтрации и приложения», реализуемого в 2020-2022 годах, совместного конкурса РНФ-DFG, с немецкой стороны руководитель Oliver Röndigs (Osnabrück University).

5. Результаты за три года и сравнение с заявкой

В заявке я писал, что собираюсь в основном заниматься следующими вопросами:
(1) изучение общих свойств мотивной стабильной гомотопической категории,
(2) вычисления, связанные с алгебраической версией ориентированных кобордизмов, в частности, вычисление кольца коэффициентов η-периодической версии спектра MSL,
(3) приложения техник мотивной теории гомотопий к когомологическим аспектам теории алгебраических групп.

В рамках первой части было получено несколько интересных результатов (о них я подробнее писал в отчётах за предыдущие годы):

- Вместе с Александром Нешитовым мы показали, что сердцевины гомотопических t-структур двух вариантов триангулированной категории оснащённых мотивов (основанная на фрейм-соответствиях, построенная Гаркушей и Паниным, и основанная на Милнор-Витт соответствиях, построенная Фазелем и Кальме) совпадают. В

частности, мы доказали, что для гомотопически инвариантного пучка структура Милнор-Витт трансферов – это то же самое, что структура $\mathbb{Z}$F-трансферов.
- Было показано, что представимая обобщённая мотивная теория когомологий, нулевой предпучок значений которой является пучком, допускает единственную SL^c-ориентацию. Кроме того, показано, что любая SL-ориентированная теория когомологий допускает изоморфизмы Тома для SL^c-расслоений.
- Показано, что $\mathbb{G}_m$-стабильная $\mathbb{A}^1$-производная категория мотивов не допускает изоморфизмов Тома для ориентированных (а также для симплектических) расслоений. Отметим, что в категории мотивов Воеводского, в категории Милнор-Витт мотивов, а также в категории этальных мотивов такие изоморфизмы есть.
- Описан пучок первых $\mathbb{A}^1$-гомологий мотивного сферического спектра.
- Получен ряд новых свойств характеристических классов в SL-ориентированных обобщённых мотивных теориях когомологий, в частности, для η-периодических теорий когомологий доказана мультипликативность полного класса Понтрягина и доказано, что класс Эйлера ориентированного векторного расслоения, допускающего подрасслоение нечётного ранга, обнуляется при умножении на η.
- Совместно с Полом Арне Остваером и Оливером Рёндигсом получены новые свойства очень эффективного накрытия спектра эрмитовой K-теории.

Явных вычислений, связанных с коэффициентами MSL-кобордизмов, мне, к сожалению, получить не удалось. В 2019 году кольцо коэффициентов MSL$[\eta^{-1}]$ вычислили Том Бахманн и Майкл Хопкинс (препринт появился в 2020 году). Отмечу, что в их статье, помимо новых идей и техник, активно используются полученные мною ранее результаты об SL-ориентированных теориях когомологий (что не удивительно, поскольку спектр MSL представляет универсальную SL-ориентированную обобщённую мотивную теорию когомологий).

В рамках приложения методов мотивной теории гомотопий к алгебраическим группам мною была вычислена $\mathbb{A}^1$-Эйлерова характеристика многообразий торов G/N и доказан обобщённый принцип расщепления, позволяющий редуцировать G-торсоры к N-торсорам, где G — редуктивная группа над полем, а N — нормализатор максимального тора. Подробнее об этом написано в первом разделе этого отчёта. Упомянутые в заявке вычисления для скрученных форм однородного многообразия E_6/F_4, к сожалению, не удалось довести до конца, по причине того, что я недооценил сложность переноса полученных вычислений для этальных мотивных когомологий (которые спускаются с расщепимой ситуации) на обычные мотивные когомологии.

6. Публикации и препринты за 2018–2020 годы

(1) Alexey Ananyevskiy, *On the $\mathbb{A}^1$-Euler characteristic of the variety of maximal tori in a reductive group*, arXiv:2011.14613
(2) Alexey Ananyevskiy, *Thom isomorphisms in triangulated motivic categories*, принята в журнал Algebraic and Geometric Topology
(3) Alexey Ananyevskiy, *SL-oriented cohomology theories*, Motivic Homotopy Theory and Refined Enumerative Geometry, Contemporary Mathematics, 745 (2020), 1-20
(4) Alexey Ananyevskiy, Oliver Röndigs, Paul Arne Østvær, *On very effective hermitian K-theory*, Mathematische Zeitschrift, 294 (2020), 1021-1034
(5) Alexey Ananyevskiy, Alexander Neshitov, *Framed and MW-transfers for homotopy modules*, Selecta Mathematica, 25:26 (2019)

(6) Alexey Ananyevskiy, Andrei Druzhinin, *Rigidity for linear framed presheaves and generalized motivic cohomology theories,* Advances in Mathematics, 333 (2018), 423-462
(7) Alexey Ananyevskiy, *On the zeroth stable* $\mathbb{A}^1$*-homotopy group of a smooth curve,* Journal of Pure and Applied Algebra, 222:10 (2018), 3195-3218