Отчет за 2018 год
Юрия Валерьевича Элияшева

1 Результаты, полученные в этом году.

1.1 Построение теории Ходжа для тропических многообразий.

Большую часть года я был сосредоточен на следующем проекте, в котором мне, к сожалению, удалось достичь лишь частичных успехов.

До недавнего времени не существовало адекватного определения когомологий тропического многообразия, которое бы вело себя аналогично когомологиями комплексного многообразия. В работе [5] было дано определение когомологий тропического многообразия и показано, что когомологии тропического многообразия совпадают с когомологиями семейства комплексных многообразий вырождающихся к этом тропическому многообразию. В работе [8] было дано определение тропической суперформы, которое оказалось естественным общением на тропический случай понятия дифференциальной формы. В этой работе удалось получить тропический аналог ряда фактов из многомерного комплексного анализа и комплексной геометрии. Оба этих понятия получили развитие в работе [6] в частности, была доказано двойственность Пуанкаре для гладких тропических многообразий и построен аналог теории когомологий де Рама, а именно, когомологии тропических многообразий были вычислены в терминах когомологий комплекса тропических суперформ.

На тропическом многообразии X можно ввести пространство (p,q)-суперформ $\mathcal{E}^{p,q}(X)$ и дифференциал

$$d'' : \mathcal{E}^{p,q}(X) \to \mathcal{E}^{p,q+1}(X),$$

это пространство является аналогом (p,q)-форм на комплексных многообразия, а дифференциал d'' является аналогом дифференциала $\overline{\partial}$. Наша цель была построить аналог теории Ходжа на тропических многообразиях. А именно, можно ввести аналог кэлеровой метрики ω, определить звездочку Ходжа $*$, оператор Лапласа-Бельтрами $\Delta_{d''} = d''d''^* + d''^*d''$ и т.д. Все эти объекты повторяют классические объекты на комплексных многообразиях.

Мы показали, что если формально следовать той схеме, которая обычно применяется при построении теории Ходжа на комплексных многообразиях (см., например, [3]), можно показать, что когомологии тропического многообразия могут быть вычислены в терминах гармонических суперформ, т.е. ядря оператора $\Delta_{d''}$. Так же выполняются стандартные следствия: разложение Лефшеца, равенство размерности $H^{p,q}(X)$ и $H^{q,p}(X)$ и аналог ряд других результатов верных для комплексных кэлеровых многообразий.

Однако, проблема состоит в том, что формальная часть классической теория Ходжа на комплексных многообразиях, при своём построении, опирается на большое количество разных результатов из функционального анализа или из теории уравнений в частных производных, многие из этих результатов локальны и по существу сводятся к изучению аналитических проблем на $\mathbb{R}^n$. К сожалению, тропическое многообразие локально устроенно как некоторый полиэдральный комплекс, а не как $\mathbb{R}^n$. Из-за этого у нас возникло большое количество серьезных проблем с построением аналогов этих аналитических результатов для тропического случая, не все из них нам удалось преодолеть. Пока нам удалось полностью решить эти проблемы только в одномерном случае, т.е. для тропических кривых. Мы надеемся что в будущем нам удастся решить и в общем случае и тем самым построить полноценный аналог теории Ходжа.

1.2 Геометрия обобщенных амёб.

Другую часть времени я был занят ревизией моей работы по обобщенным амебам [1], после существенной переработки статьи её последняя версия была отправлена в журнал.

Понятие амебы алгебраической гиперповерхности в торе было определено в 1994 году Гельфандом, Капрановым и Зелевинским в монографии [2]. С тех пор были получены многочисленные результаты как о структуре самих амеб, так и об их применении в многомерном комплексном анализе и тропической геометрии. *Амебой* $\mathcal{A}_X$ замкнутого алгебраическо множества X в $(\mathbb{C}^*)^m$ называется, по определению, его образ в $\mathbb{R}^m$ при отображении

$$\mathrm{Log} : (z_1, \ldots, z_m) \to (\log|z_1|, \ldots, \log|z_m|).$$

Амёбой $\mathcal{A}_F$ многочлена Лорана $F(z)$ в $(\mathbb{C}^*)^m$ называется образ гиперповерхности $\{F(z) = 0\}$ при отображении Log. Амёбы алгебраических множеств коразмерности 1 являются наиболее изученным видом амёб. Известно, что компоненты дополнения амёбы в $\mathbb{R}^m$ выпуклы, и геометрия этих компонент описывается в терминах многогранника Ньютона многочлена $F(z)$ [4].

И.М. Кричевер [7] предложил некоторое обобщение понятия амебы для случая комплексных кривых, которое мы распространили на многомерный случай [1] следующим образом. Пусть V гладкое компактное комплексное многообразие размерности $m-1$, и D дивизор с нормальными пересечениями и гладкими неприводимыми компонентами. Выбирем набор $\omega_1, \dots, \omega_m$ замкнутых голоморфных 1-форм на $V \setminus D$ с логарифмическими особенностями вдоль D таких, что интегралы $\int_\gamma \omega_i, i = 1, \dots, m$ по любому циклу $\gamma \in H_1(V \setminus D, \mathbb{Z})$ являются чисто мнимыми числами. Тогда можно определить отображение

$$\mathrm{Log}_\omega : V \setminus D \to \mathbb{R}^m,$$

следующим образом

$$p \mapsto (\mathrm{Re} \int_{p_0}^{p} \omega_1, \dots, \mathrm{Re} \int_{p_0}^{p} \omega_m),$$

где $p, p_0 \in V \setminus D$, p_0 — произвольная фиксированная точка, заметим, что данное отображение корректно определено. Образ отображения Log_ω назовем *обобщённой амебой*, обозначим его $\mathcal{A}_\omega$. В работе [1] мы показали, что основе факты об обычных амёбах верны и в том или ином виде и в обобщенном случае.

Основное наше продвижение полученное в этом году можно описать так. С амёбой гиперповерхности $\mathcal{A}_F$ или с обобщенной амёбой $\mathcal{A}_\omega$ мы связали некоторый тропический суперпоток S бистепени $(1,1)$, т.е. функционал на тропических суперформах. Данный суперпоток можно рассматривать, как тропический аналог потока интегрированию по гиперповерхности корзамерности 1 в комплексном многообразии. Мы показали, что поток S замкнут и положителен в тропическом смысле и следовательно, следуя работе [8], существует некоторая выпуклая функция $\mathcal{R}$, такая что $S = d'd''\mathcal{R}$. Опять же этот результат имеет классический комлексный аналог, а именно для любого замкнутого положительного $(1,1)-$потока на $\mathbb{C}^n$ существует плюрисубгармоническая функция ρ, такая что $\omega = i\partial\overline{\partial}\rho$. Мы показали, что данная функция $\mathcal{R}$ будет в точности функций Ронкина амёбы, тем самым мы дали новую конструкцию для функции Ронкина амёбы и интересную трактовку: функции Ронкина — это потенциал для потока интегрирования по амёбе. Напомним, что функция Ронкина играет важную роль в изучении геометрии амёбы.

1.3 Участие в конференциях и школах.

В этом году я принял участие в Летней математической школе «Алгебра и геометрия», г. Ярославль и сделал доклад на проходившей в рамках неё конференции.

1.4 Педагогическая деятельность.

В текущем году преподавал ряд дисциплин: математический анализ, алгебра, теория вероятностей в МИЭМ НИУ ВШЭ.

Список литературы

[1] Yu. Eliyashev, Geometry of generalized amoebas, preprint arXiv:1608.06077

[2] I. Gelfand, M. Kapranov, A. Zelevinsky, Discriminants, resultants and multidimensional determinants, Birkhauser, Boston, 1994, vii + 523 pp.

[3] P. Griffiths, J. Harris, Principles of Algebraic Geometry, Wiley, New York, 1978

[4] Mikael Forsberg, Mikael Passare, August Tsikh, Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas. Adv. Math. 151 (2000), no. 1, 45-70.

[5] Ilia Itenberg, Ludmil Katzarkov, Grigory Mikhalkin, Ilia Zharkov, Tropical Homology, arXiv:1604.01838

[6] Philipp Jell, Kristin Shaw, Jascha Smacka Superforms, Tropical Cohomology and Poincaré Duality, arXiv:1512.07409

[7] Igor Krichever, Amoebas, Ronkin function, and Monge-Ampère measures of algebraic curves with marked points. Topology, geometry, integrable systems, and mathematical physics, 265-278, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 234, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2014.

[8] Aron Lagerberg, Super currents and tropical geometry. Math. Z. 270 (2012), no. 3-4, 1011-1050.