Отчет по гранту конкурса «Молодая математика России» за 2020 год

Гаража Александра

Полученные результаты

Продолжена работа по нахождению полной системы функций в биинволюции на простых алгебрах Ли относительно двух согласованных скобок Пуассона: канонической $\{\varphi,\psi\}(x)=\langle x,[d\varphi,d\psi]\rangle$ и скобки «с замороженным аргументом» $\{\varphi,\psi\}_a(x)=\langle a,[d\varphi,d\psi]\rangle$ (здесь φ и ψ — многочлены на $\mathfrak{g}$, а $d\varphi$ и $d\psi$ рассматриваются как элементы алгебры $\mathfrak{g}$ отождествленной с $\mathfrak{g}^*$ при помощи инвариантного скалярного умножения $\langle\cdot,\cdot\rangle$).

Эту задачу можно переформулировать на языке линейной алгебры. Для этого скобки Пуассона рассматриваются как кососимметрические билинейные формы f_x и f_a над полем $\mathbb{K}=\mathbb{C}(\mathfrak{g})$ на пространстве $\mathfrak{g}\otimes\mathbb{K}$, а именно $\{\varphi,\psi\}=f_x(d\varphi,d\psi)$ и $\{\varphi,\psi\}_a=f_a(d\varphi,d\psi)$. Таким образом, вопрос о нахождении полной системы функций в биинволюции сводится к вопросу о нахождении базиса билагранжева подпространства относительно форм f_x,f_a (с последующим «интегрированием»).

Согласно теореме Жордана-Кронекера пара кососимметрических билинейных форм может быть согласованно приведена к каноническому блочно-диагональному виду с блоками двух типов: жордановыми и кронекеровыми. Если размеры кронекеровых блоков — $2m_0+1,\dots 2m_k+1$, то числа $m_0,\dots m_k$ называются индексами Кронекера. Если пара форм приведена к каноническому виду, то базис билагранжева подпространства составляют вторые половины базисов каждого блока. Для нахождения базиса кронекеровых блоков можно воспользоваться методом Кронекера: рассматривается подмодуль $\operatorname{Ker}(f_x-tf_a)$ модуля $\mathfrak{g}[t]$ над кольцом $\mathbb{K}[t]$. Затем находится его *минимальный базис* — базис, старшие коэффициенты элементов которого независимы. Тогда степени многочленов минимального базиса — это индексы Кронекера пары f_x,f_a, а коэффициенты этих многочленов составляют кронекерову часть базиса билагранжева подпространства.

Ранее были построены кронекеровы части полной системы функций в биинволюции для алгебр Ли $\mathfrak{sl}_n$ и $\mathfrak{sp}_{2n}$, а также для $\mathfrak{so}_{2n+1}$ в случае полупростого элемента a. Кроме того, для случая $\mathfrak{so}_{2n+1}$ была сформулирована гипотеза об индексах Кронекера в случае нильпотентного элемента a. Также для алгебр Ли $\mathfrak{sl}_n$ и $\mathfrak{sp}_{2n}$ была сформулирована гипотеза о способе построения оставшейся жордановой части полной системы функций в биинволюции. Ни одну из этих гипотез доказать в этом году не удалось. Некоторые продвижения получены в следующих направлениях.

Исключительные алгебры Ли. Для всех исключительных алгебр Ли найдены индексы Кронекера в случае нильпотентного элемента a. Это было сделано с помощью системы компьютерной алгебры GAP (Groups, Algorithms, Programming).

Случай алгебры Ли $\mathfrak{so}_{2n}$. Для нильпотентных элементов a была получена гипотеза об индексах Кронекера. Согласно этой гипотезе индексы Кронекера в алгебре $\mathfrak{so}_{2n}$ совпадают с индексами Кронекера для того же элемента a в алгебре $\mathfrak{sl}_{2n}$, взятыми через один, кроме индексов на «особых» позициях. Как и в случае $\mathfrak{so}_{2n+1}$ эта гипотеза согласуется с гипотезой Элашвили, т.е. для её доказательства достаточно явно предъявить любой базис подмодуля $\operatorname{Ker}(f_x-tf_a)$ с подходящими степенями элементов (и он автоматически будет минимальным).

Для полупростых элементов a также получена гипотеза об индексах Кронекера. Она согласуется с гипотезой о «вычитании индексов Кронекера», сформулированной в прошлом году, если внести в неё небольшие дополнения, связанные с пфаффианом.

Публикации

[1] А. А. Гаража, “О каноническом базисе пары согласованных скобок Пуассона на алгебре матриц”, Матем. сб., 211:6 (2020), 95–106; A. A. Garazha, “A canonical basis of a pair of compatible Poisson brackets on a matrix algebra”, Sb. Math., 211:6 (2020), 838–849

[2] О каноническом базисе пары согласованных скобок Пуассона на алгебре Ли $\mathfrak{sp}_{2n}$ — готовится к подаче в журнал

Участие в конференциях и школах

[1] VIII школа-конференция "Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов"

Педагогическая деятельность

[1] Вела семинары по алгебре у первого курса бакалавриата на факультете компьютерных наук НИУ ВШЭ.

[2] Была преподавателем курса Linear algebra программы «Магистр по наукам о данных» НИУ ВШЭ

Итоги трех лет

Основной задачей было построение полной системы функций в биинволюции на простых алгебрах Ли относительно двух скобок Пуассона: канонической и замороженной. Ещё до участия в конкурсе мной была найдена кронекерова часть полной системы функций для алгебры $\mathfrak{sl}_n$. Для каждого пункта проекта исследований сравним заявку с достигнутыми результатами и перечислим возникшие трудности.

1. *Построить кронекерову часть полной системы функций в биинволюции для остальных классических алгебр Ли.*

- Для алгебры Ли $\mathfrak{sp}_{2n}$ эта задача решена. Оказалось, что достаточно взять каждый второй элемент из канонического базиса, построенного для алгебры $\mathfrak{sl}_{2n}$.
- Для алгебры Ли $\mathfrak{so}_{2n+1}$ для полупростых элементов a задача тоже решена, для нильпотентных a сформулирована гипотеза об индексах Кронекера.
- Для алгебры Ли $\mathfrak{so}_{2n}$ для полупростых и нильпотентных элементов a сформулирована гипотеза об индексах Кронекера.

Таким образом, надежды на то, что из случая $\mathfrak{sl}_n$ получится вывести ответы и для других случаев, не полностью оправдались. Видимо, это связано с самим используемым методом «предъявить некоторый базис подмодуля $\mathrm{Ker}(f_x - tf_a)$ и проверить его минимальность».

2. *Решить аналогичную задачу для исключительных простых алгебр Ли.*

Удалось посчитать индексы Кронекера для всех исключительных алгебр Ли в случае нильпотентного элемента a. Вопрос «в каком виде может быть получен ответ» так и остался открытым.

3. *Найти жорданову часть полной системы функций в биинволюции*

Сформулирована гипотеза, согласно которой жорданова часть строится по кронекеровой части с помощью взятия частных производных. Сложность заключается в доказательстве алгебраической независимости построенных функций.

4. *Реализовать подалгебру, порожденную полной системой функций в биинволюции, как формальный предел подалгебр Мищенко-Фоменко регулярных элементов a.*

Полную систему функций так и не получилось построить, поэтому этот пункт не рассматривался.