Отчёт о научной и педагогической работе за первый год гранта "Молодая математика России-2017".

Никита Калинин

Санкт-Петербург, 9 декабря 2018 г.

Наука. За 2018-ый год опубликованы работы [4, 1] и принята к печати работа [2]. Все эти работы имеют отношение к проекту про песочные модели, [2] относится непосредственно к теме получаемого гранта.

В [4] записана теория тропических рядов, то есть функций вида $\inf(ix + jy + a_{ij})$ где (i, j) пробегает (возможно, бесконечное) подмножество $\mathbb{Z}^2$. Получены новые результаты, обобщающие наши результаты про тропические ряды на случай старших размерностей. В частности, из этих общих результатов выводятся следующие следствия:

- каждое компактное выпуклое тело Ω в $\mathbb{R}^n$ при выборе решётки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ каноническим образом приближается "изнутри" многогранниками с рациональными нормальными векторами к граням. Приближения эти являются границами ε-окрестностей границы Ω в некоторой метрике (а именно: разрешается ходить по путям с касательными векторами, которые локально постоянны и рациональны, и длина вектора $p \in \mathbb{Z}^n$ со взаимно-простыми координатами равна квадрату его Эвклидовой длины.)

- **Гипотеза: каждое компактное выпуклое тело в $\mathbb{R}^3$ приближается "изнутри" унимодулярными многогранниками, то есть многогранниками, у которых примитивные нормальные вектора к граням, сходящимся в каждой вершине, образуют базис в $\mathbb{Z}^3$.** Двумерный аналог этого факта доказан в [2].

В [1] предъявлена простая непрерывная модель самоорганизующейся критичности, что было экспериментально проверено на мексиканском суперкомпьютере.

Далее представлено описание некоторых из результатов, как записанных, так и не записанных в опубликованных работах.

Преподавание. Разработан курс математики (не включающий теорию вероятностей и статистику) для социологов, написана книга-конспект

`http://mathcenter.spb.ru/nikaan/teach/socmathbook.pdf`

Также я веду семинары по теории игр у экономистов ВШЭ, несколько студентов ВШЭ пишут под моим руководством курсовые по теории игр и аукционам. Организую студенческий семинар по топологии в СПбГУ. Ещё в этом году я снова организовал олимпиаду по топологии.

`http://mathcenter.spb.ru/nikaan/olympiad.html`

Доклады на конференциях.

15.11.2018 "The origin of the formulae for π from sandpile problems", HSE Moscow,

28.09.2018 "Tropical geometry and summation over $SL(2, \mathbb{Z})$", MIPT, Moscow

27.06.2018 "Scaling limits in sandpile models and summation by a part of $SL(2, \mathbb{Z})$", Ascona, Switzerland

22.06.2018 "Tropical sandpile: patchworking geometry and arithmetic", Belalp, Switzerland

13.02.2018 "Tropical series", Institut Mittag-Lefler, Stockholm

1 Полученные формулы, [2]

Пользуясь обобщённым методом Архимеда, см. [3], для любой выпуклой кривой можно построить некоторую сумму по матрицам из $SL(2,\mathbb{Z})$ с положительными элементами.

Для параболы:

$$\sum_{\substack{p_1,q_1,p_2,q_2\geq 0\\ p_1q_2-p_2q_1=1}} \frac{1}{(p_1+q_1)^2(p_2+q_2)^2(p_1+q_1+p_2+q_2)^2} = \frac{1}{3}$$

Для треугольника с иррациональной стороной:

$$\alpha = [\alpha] + \sum_{p_n,q_n} (p_n - \alpha q_n)^2 r_n,$$

$$\alpha + 1 = [\alpha] + \sum_{p_n,q_n} (p_n - \alpha q_n) r_n,$$

где $r_0, r_1, \ldots$ коэффициенты непрерывной дроби α и $\frac{p_n}{q_n}$ это n-ая подходящая дробь к α

$$r_0 = [\alpha] = \frac{p_0}{q_0}, r_1 = [\frac{1}{\alpha - r_0}], \frac{p_1}{q_1} = r_0 + \frac{1}{r_1}, \text{etc.}$$

Для диска в L^μ-норме:

Рассмотрим область $\Omega_\mu \subset \mathbb{R}^2$ заданную как $|x|^\mu + |y|^\mu \leq 1$, для $\mu > 1$. Показано что четверть площади Ω_μ равно

$$\frac{\Gamma^2(2-\nu^{-1})}{\Gamma(3-2\nu^{-1})} = 1 - \frac{1}{2}\sum(|v_1|_\nu + |v_2|_\nu - |v_1+v_2|_\nu)^2,$$

где $|\cdot|_\nu$ обозначает двойственную норму, т.е. $\mu^{-1} + \nu^{-1} = 1$, и суммирование происходит по $(v_1 v_2) \in SL^+(2,\mathbb{Z})$, как и в вышеописанных формулах.

1.1 Аналог формулы Стокса

Пусть

$$f_\Omega(x,y) = \inf(ix + jy + a_{ij})$$

где $ix+jy+a_{ij} = 0$ уравнение опорной прямой к выпуклой области Ω, $ix+jy+a_{ij}$ неотрицательно на Ω и (i,j) пробегает $\mathbb{Z}^2\backslash\{(0,0)\}$. Множество негладкости f (то есть множество точек (x,y) в никакой окрестности которых f локально не является линейной функцией) – каноническая тропическая (аналитическая) кривая (плоский граф с вершинами и рёбрами) C_Ω, ассоциированная с Ω. В [3, 2] получены формулы для суммы значений f_Ω и f_Ω^2 по вершинам тропической кривой C_Ω, эти формулы имеют простое геометрической описание.

Доказаны следующие факты (несложные):

$$\sum_v f_\Omega(v) = \int_{C_\Omega} 1, \sum_v f_\Omega^2(v) = \int_{C_\Omega} f_\Omega,$$

где v пробегает вершины C_Ω.

По существу, происходит следующее: так как все вершины (кроме одной) графа C_Ω имеют степень три, при интегрировании производной g' дифференцируемой функции g по рёбрам кривой мы получим $\sum g(v)$ по всем вершинам. Далее, метрика на графе определяется с помощью обратного образа метрики на $\mathbb{R}$ при отображении $f_\Omega : C_\Omega \to \mathbb{R}$. Поэтому на кривой C_Ω, имеем $f_\Omega(x) = C - d(x, x_0)$ где C это максимальное значение f_Ω на C_Ω, x_0 это точка C_Ω, в которой достигается это значение и $d(x, x_0)$ это расстояние между x, x_0 в только что определённой метрике.

Поэтому, если $g(x)$ – любая функция на C_Ω, зависящая только от расстояния между x и x_0, то сумма значений g по вершинам C_Ω или интеграл от неё считаются легко. В самом деле,

$$\sum_v g(v) = \int g'(f_\Omega) df_\Omega = \int\limits_{C_\Omega} g'.$$

1.2 Самоорганизующаяся критичность

При изучении картинок, полученных при релаксации небольших возмущений максимального стабильного состояния песочной модели на большой области плоской решётки, были сформулированы и доказаны теоремы о некоторых предельных сходимостях к тропическим кривым. Естественной выглядела идея проверить какие свойства песочной модели продолжают выполняться в её пределе при ремасштабировании.

В [4] были изучены базовые свойства предельной динамики, которая является динамикой на разбиениях выпуклой области на выпуклые многоугольники, границы которых проходят через конечное множество заданных точек.

Базовый шаг динамики выглядит так: в каждый момент некоторым образом (например, случайным) выбирается точка внутри области. Далее, многоугольник, внутрь которого попала эта точка начинает стягиваться, то есть его стороны равномерно движутся внутрь, до тех пока пока точка не окажется на границе этого многоугольника. При этом некоторые из выбранных ранее точек оказывается не на границе многоугольников, и к многоугольникам, которые их содержат, применяется та же операция стягивания. Когда стягивание применяется к многоугольнику, пересекающему границу области, новый многоугольник появляется, отслаиваясь от границы области в этом месте. Можно доказать, что динамика определена корректно, и площадь части области, в которой разбиение изменилось, называется площадью лавины, вызванной добавлением очередной выбранной точки.

Основной результат [1] заключается в том, что площади лавин подчиняются степенному распределению, что является признаком самоорганизующейся критичности. Остальная часть статьи является более или менее доступным изложением идей тропической геометрии, пропорционального роста, самоорганизующейся критичности для неспециалистов, с указанием возможных перспектив взаимопроникновения этих областей.

Список литературы

[1] N. Kalinin, A. Guzmán-Sáenz, Y. Prieto, M. Shkolnikov, V. Kalinina, and E. Lupercio. Self-organized criticality and pattern emergence through the lens of tropical geometry. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 115(35):E8135–E8142, 2018.

[2] N. Kalinin and M. Shkolnikov. Tropical formulae for summation over a part of $SL(2,\mathbb{Z})$. *to appear in European Journal of Mathematics, arXiv:1711.02089.*

[3] N. Kalinin and M. Shkolnikov. The number π and a summation by $SL(2,\mathbb{Z})$. *Arnold Mathematical Journal*, 3(4):511–517, 2017.

[4] N. Kalinin and M. Shkolnikov. Introduction to tropical series and wave dynamic on them. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*, 38(6):2843–2865, 2018.