1. Результаты

1. Мультипликативные пути Дика

Пусть p — нечётное простое число. Последовательность чисел $\left\{\left(\frac{n}{p}\right)\right\}_{n<p}$ можно рассматривать как путь на клетчатой плоскости, где n-ный шаг пути соответствует сдвигу на вектор $\left(1, \left(\frac{n}{p}\right)\right)$. Для некоторых простых чисел получающийся путь является путём Дика, т.е. не пересекает ось абсцисс. Такие простые числа будем называть простыми Борвейна-Чхве-Кунса. Обозначим множество таких простых чисел $\mathcal{L}^+$. Борвейн, Чхве и Кунс показали, что множество $\mathcal{L}^+$ имеет относительную плотность не более $\frac{1}{2}$ во множестве всех простых чисел.
При помощи сведения вопроса о плотности $\mathcal{L}^+$ к поведению частичных сумм случайных вполне мультипликативных функций и, далее, к максимумам некоторых гауссовских процессов, нам удалось показать, что $\mathcal{L}^+$ имеет плотность 0. Получены также явные оценки для убывания величины

$$\frac{\mathcal{L}^+ \cap [1, x]}{\pi(x)}$$

с ростом x. Результаты готовятся к публикации.

2. Суммы квадратов и дифференциальные уравнения

Функция $S(z, \tau)$, возникшая в контексте изучения больших промежутков между суммами двух квадратов, допускает представление в виде

$$S(z, \tau) = \sum_{n \geq 0} r_2(n) J_0(2\pi\sqrt{nz}) e^{\pi i n \tau} = \exp\left(-\frac{\pi^2}{6} E_2(\tau)\right) \sum_{n \geq 0} g_n(\tau) z^n.$$

Здесь первое равенство — это изначальное определение $S(z, \tau)$, z — комплексное число, τ лежит в верхней полуплоскости, $r_2(n)$ есть число решений уравнения $a^2 + b^2 = n$ в целых числах, J_0 — функция Бесселя. Кроме того,

$$E_2(\tau) = 1 - 24 \sum_{n \geq 1} \sigma_1(n) e^{2\pi i n \tau}$$

— квазимодулярный ряд Эйзенштейна. Оказывается, что коэффициенты $g_n(\tau)$

допускают представление в виде многочленов от функций

$$x(\tau) = -\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi i n^2\tau}\right)^4 \text{ и } y(\tau) = \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{\pi(n+1/2)^2\tau}\right)^4.$$

Более точно, пользуясь дифференциальными уравнениями, связывающими x, y и E_2, удаётся доказать, что

$$g_n(\tau) = \pi^{2n} x^n p_n(u)\sqrt{y-x},$$

где $u = \frac{y}{x}$, $p_0(u) \equiv 1$ и для всех $n \geq 0$ выполнено рекуррентное соотношение

$$(n+1)^2 p_{n+1}(u) + p_n(u)\left(n\left(\frac{1}{3} - \frac{2u}{3}\right) + \frac{u+1}{6}\right) + (u^2-u)p_n'(u) + \frac{u^2-u+1}{36}p_{n-1}(u) = 0.$$

Данный результат был представлен на конференции "Интегрируемые системы и автоморфные формы". Планируется дальнейшее изучение получающейся последовательности модулярных форм.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

1. Orthorecursive expansion of unity (совместно с П. Р. Косенко), International Journal of Number Theory, Volume 16, Issue 06, doi:10.1142/S1793042120500621
2. On symmetry graph of prime numbers, принято к печати в онлайн-журнале Integers.

3. Участие в конференциях и школах

1. Семинар «Функциональный анализ и некоммутативная геометрия», Москва, 6 февраля 2020 года
Доклад «Graph C*-algebras»
2. Международная конференция "Интегрируемые системы и автоморфные формы", 24-29 февраля 2020, Математический Центр «Сириус», Сочи
Доклад «Sums of squares, Jacobi forms and differential equations»

3. Семинар «Современные проблемы теории чисел», Москва, 11 июня 2020 года
Доклад «Суммы кубов»

4. Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная столетию со дня рождения профессоров Б. М. Бредихина, В. И. Нечаева и С. Б. Стечкина, 23-26 сентября 2020 года
Доклад «Orthorecursive expansion of unity»

5. Семинар «Функциональный анализ и некоммутативная геометрия», Москва, 19 ноября 2020 года
Доклад «C*-algebras and number fields»

6. Итоговая конференция МЛЗС "Молодые математики - 2021", Москва, 27 ноября 2020 года.
Доклад «Мультипликативные пути Дика»

4. Работа в научных центрах и международных группах.

Являюсь младшим научным сотрудником Международной Лаборатории Зеркальной Симметрии и Автоморфных Форм НИУ ВШЭ. В рамках гранта РНФ №18-41-05001 участвую в международном сотрудничестве российских и австрийских учёных, также участвую в гранте РНФ №19-11-0001.

5. Педагогическая деятельность

В 2020/21 учебном году являюсь лектором и автором программы и учебных материалов научно-исследовательских семинаров "Distribution of prime numbers" (1 семестр) и "Character sums" (2 семестр). Данные курсы — модификации ранее прочитанных курсов "Analytic number theory". По сравнению с предыдущими годами, фокус семинаров сместился от методов к задачам.
Работаю учебным ассистентом научно-исследовательского семинара "Introduction to ergodic theory", математический факультет НИУ ВШЭ.

6. Итоги работы за 2018-2020 годы

За 2018-2020 годы опубликовано 5 статей: "О числах Новака", "Omega-theorems for the Riemann zeta-function and its derivatives near the line $\operatorname{Re} s = 1$", "Large values of short character sums", "Interval between which are sums of two squares" и "Orthorecursive expansion of unity", а также три препринта "Large gaps between sums of two squares", "Long nonnegative sums of Legendre symbols" и "On symmetry graph of prime numbers". Первый из препринтов написан совместно с академиком РАН С. В. Конягиным. Планируется, что он будет включён в совместную с иностранными авторами работу о промежутках между значениями квадратичных форм. Сделано 27 докладов на конференциях и семинарах различного уровня.

Исследования по направлению, заявленному на конкурс, продолжаются. К сожалению, получить равенства, аналогичные конструкции Кузнецова для автоморфных форм, для произвольных L-рядов с функциональными уравнениями пока не удается. При помощи вариации доказательства функционального уравнения для дзета-функции вещественного квадратичного поля можно получить аналог конструкции Кузнецова, однако этот аналог, по всей видимости, не является "правильным" обобщением, поскольку не улавливает поведения соответствующей арифметической функции в коротких интервалах.

С другой стороны, совместно с С. В. Конягиным получены новые нижние оценки для промежутков между суммами двух квадратов. Кроме того, так как задачи о суммах квадратов оказываются связаны с вопросами о распределении квадратичных вычетов в $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, начато исследование распределения квадратичных вычетов $\bmod N$ в различных диапазонах вещественной прямой.

Начиная с 2018 года в каждом семестре проводится авторский курс по аналитической теории чисел на математическом факультете НИУ ВШЭ. Курс продолжает совершенствоваться и набирать популярность среди студентов факультета.