1. Результаты

1. **Интервалы между суммами двух квадратов.**
Пусть $\mathcal{S}$ — множество сумм двух квадратов. Представляет большой теоретико-числовой интерес изучение распределения значений функции $R(x)$ — расстояния от числа x до ближайшего элемента $\mathcal{S}$. Так как плотность множества $\mathcal{S}$ убывает как отрицательная степень логарифма (более точно, $\frac{\mathcal{S}\cap[1,x]}{x} \sim \frac{C}{\sqrt{\ln x}}$ для некоторого $C > 0$), то ожидается, что $R(x) = O((\ln x)^A)$ для некоторого A. Отрицательные результаты в этом направлении гласят, что $A \geq 1$. В то же время наилучшая равномерная верхняя оценка, известная в данный момент — $R(x) = O(x^{1/4})$. Поддается частичному решению более простой вопрос, а именно задача нахождения оценок для степенных моментов $R(x)$, или, что то же самое, моментов промежутков между соседними элементами $\mathcal{S}$

$$\sum_{s_n \leq x} (s_{n+1} - s_n)^\gamma$$

для фиксированного $\gamma > 1$, где s_n — n-ый элемент множества $\mathcal{S}$. В 2017ом году мне удалось получить наилучший известный результат в этом направлении, а именно оптимальную с точностью до логарифмических множителей оценку для моментов порядка γ для всех $\gamma \leq 2$ (предыдущий наилучший результат работал для $\gamma < 5/3$). В своём доказательстве я рассмотрел функцию

$$S(N, M) = \sum_{n \geq 0} r_2(n) J_0(2\pi\sqrt{Nn}) e^{-\pi n/M},$$

которая, как оказалось, очень близка к нулю, если величина $R(N)$ велика. Здесь $r_2(n)$ есть количество решений уравнения $n = a^2 + b^2$ в целых числах, а $J_0(x)$ — обыкновенная функция Бесселя первого рода. В результате дальнейших исследований была выявлена связь поведения функции $S(N, M)$ с одномерным уравнением диффузии

$$\pi \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

А именно, несложно проверить, что функция $u(x, t) = S(x, 1/t)$ раскладывается в сумму стоячих волн этого уравнения. Это наблюдение позволяет установить

нетривиальную взаимосвязь между порядком роста логарифмической производной функции $S(N, M)$ по первому аргументу и третьим моментом промежутков между суммами двух квадратов.
Планируется дальнейшее изучение обнаруженной взаимосвязи. Отметим также, что оценки для третьего момента пока что лежат далеко за пределами существующих методов.
Статья, посвященная оценкам моментов порядка $\gamma \leq 2$, подана в журнал Mathematika.

2. **Орторекурсивное разложение единицы** (совместно с П. Р. Косенко)
Пусть $\mathcal{H} = L^2([0,1], dx)$ — гильбертово пространство квадратично-интегрируемых по мере Лебега функций на отрезке $[0,1]$. Хорошо известно, что последовательность $\{1, x, x^2, \ldots\}$ не образует базиса Шаудера в этом пространстве. Одна из попыток найти количественное выражение этому факту привела к следующей любопытной конструкции: определим последовательность многочленов $p_n(x)$ условиями $p_0(x) = 1$, $p_n(x) = p_{n-1}(x) + c_n x^n$ для константы c_n, такой, что минимум нормы $||p_{n-1}(x) + cx^n||_{\mathcal{H}}$ достигается при $c = c_n$. Такая последовательность называется орторекурсивным разложением функции 1 в пространстве $\mathcal{H}$ относительно системы $\{x, x^2, x^3, \ldots\}$. Можно показать, что все c_n рациональны. Например, $c_{10} = \frac{770098483166113}{115852476579840000}$. Последовательность c_n обладает рядом интересных свойств. Авторам удалось показать, что $c_n = O(n^{-3/2})$, а так же что сумма $c_0 + c_1 + \ldots + c_n + \ldots$ равна 0 (доказательство этих фактов оказалось неожиданно непростым, хотя и элементарным). Были численно обнаружены и другие закономерности, которым удовлетворяет последовательность c_n, однако им пока не удалось найти доказательств. В частности, мы ожидаем, что для c_n существует асимптотическая формула, которая содержит тригонометрические функции от логарифма n. На это указывают места перемен знаков коэффициентов c_n, которые, судя по всему, экспоненциально редки. Первые несколько перемен знака происходят при $n = 0, 1, 27, 533, 10457$. Кроме того, удалось определить бесконечное семейство последовательностей со схожими свойствами. Результаты готовятся к публикации.

3. **Большие значения коротких сумм характеров**
Пусть χ — неглавный характер Дирихле по модулю q. Теорема Бёрджесса утверждает, что для свободного от кубов q все суммы значений χ по интервалам длины хотя бы $q^{1/4+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$, допускают нетривиальные оценки. В декабре 2017 года я доказал, что для любого $A > 0$ существует бесконечно много таких простых чисел p, что сумма значений квадратичного характера (то есть символа

Лежандра) по модулю p длины $(\ln p)^A$ не допускает нетривиальных по порядку верхних оценок. Доказательство использует теоремы о распределении нулей Зигеля $L-$функций Дирихле, то есть вещественных β, близких к 1 и таких, что

$$L(\beta,\chi)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\chi(n)}{n^\beta}=0.$$

Статья "Large values of short character sums", содержащая доказательство этого утверждения, принята к печати в журнале Journal of Number Theory. Планируется дальнейшее обобщение и расширение полученных результатов, в том числе доказательство неслучайности распределения некоторых подмножеств в $\mathcal{Z}/p\mathcal{Z}$ с мультипликативной структурой и изучение феномена неотрицательности сумм символов Лежандра.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

1. О числах Новака
Математический сборник, 2018, том 209, номер 4, страницы 26–37

2. Omega-theorems for the Riemann zeta function and its derivatives near the line $\operatorname{Re} s=1$.
Acta Arithmetica 186 (2018), 201-217

3. Large values of short character sums
arXiv:1712.08080, принято к печати в журнале Journal of Number Theory

4. Intervals between numbers that are sums of two squares
arXiv:1706.07380, статья подана в журнал Mathematika

3. Участие в конференциях и школах

1. 6th International Conference on Uniform Distribution Theory, Люмини, Франция, 1–5 октября 2018 года.
Доклад “Large values of short character sums”
2. School and research conference “Modular forms and beyond”, Санкт-Петербург, Россия, 21–26 мая 2018 года.
Доклад “Cohen-Kuznetsov series and intervals between numbers that are sums of two squares”

3. XV Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова, Тула, Россия, 28–31 мая 2018 года.
Доклад “Интервалы между числами, представимыми в виде суммы двух квадратов”
4. Международная конференция «Алгебра, алгебраическая геометрия и теория чисел» памяти академика Игоря Ростиславовича Шафаревича, Москва, Россия, 13–14 июня 2018 года.
Доклад “Large values of short character sums”.
5. Вторая мемориальная миниконференция памяти Алексея Зыкина, Москва, Россия, 21 июня 2018 года.
Доклад “Большие значения коротких сумм характеров”.
6. Семинар “Москва–Санкт-Петербург”, Москва, Россия, 15-16 ноября 2018 года.
Доклад “Распределение квадратичных вычетов”.
7. Семинар “Автоморфные формы и их приложения”, Москва, Россия, 5 и 12 марта 2018 года.
Доклады “Мок тета-функции”.
8. Семинар “Функциональный анализ и некоммутативная геометрия”, Москва, Россия, 12 и 26 марта, 2018 года.
Доклады “Некоммутативные L^p-пространства".
9. Семинар “Современные проблемы теории чисел”, Москва, Россия, 13 и 20 декабря 2018 года.
Доклады “Гипотеза Эрдёша о расхождении”.

4. Работа в научных центрах и международных группах.

Являюсь стажёром-исследователем международной Лаборатории зеркальной симметрии и автоморфных форм НИУ ВШЭ. В рамках гранта РНФ №18-41-05001 участвую в международном сотрудничестве российских и австрийских учёных.

5. Педагогическая деятельность

Организовал неофициальный студенческий семинар по теории чисел на математическом факультете НИУ ВШЭ, в рамках которого обсуждаются современные

результаты аналитической теории чисел. В частности, в 2018ом году было разобрано доказательство существования малых промежутков между сколь угодно большими простыми числами (результат Д. Мэйнарда, 2013 год) и доказательство гипотезы Эрдёша о расхождении (результат Т. Тао, 2015 год).
Читаю двухсеместровый научно-исследовательский семинар для студентов математического факультета НИУ ВШЭ "Analytic number theory"на английском языке.
Работаю учебным ассистентом на курсах "Алгебра-1"в Независимом Московском Университете и "Теория функций комплексного переменного"для 3 курса бакалавриата математического факультета НИУ ВШЭ.