Отчёт по гранту «Молодая математика России» за 2018 г.

С. Л. Кузнецов

1 Введение

Исследования С. Л. Кузнецова в 2018 г. были посвящены частично-упорядоченным алгебраическим структурам с делениями, обогащёнными дополнительными операциями. Известны два естественных примера таких структур. Первая — алгебра формальных языков (над некоторым алфавитом Σ). Умножение определяется как поэлементное приписывание (конкатенация) слов. Операции деления проще всего объяснить с точки зрения приложений в лингвистике. Например, если S — язык, состоящий из всех правильно построенных предложений, а N — язык имён существительных, то к языку $N \setminus S$ будут относиться непереходные глаголы (если к такому глаголу приписать слева существительное, то получится правильное предложение); в $N \setminus S \,/\, N$ будут переходные глаголы, и т.д. Поскольку формальные языки в общем случае некоммутативны (порядок букв и слов имеет значение), различают левое и правое деления. Важной операцией является также итерация Клини: $A^* = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} A^n$: например, если S — язык предложений, то S^* состоит из правильно построенных текстов. Рассматриваются также теоретико-множественные операции пересечения и объединения языков. Другой пример — алгебра бинарных отношений на некотормо множестве W. Здесь умножению соответствует композиция отношений, естественным образом определяются оба деления. Итерации Клини соответствует операция взятия рефлексивно-транзитивного замыкания. Роль частичного порядка и в первом, в во втором случае играет отношение включения множеств.

Абстрактные определения алгебраических структур таковы:

- *моноидом с делениями* называется частично упорядоченный моноид $\langle \mathfrak{A}, \cdot, \mathbf{1}, \preceq \rangle$ с операциями деления, удовлетворяющим следующим равносильностям (для всех a, b, c):

  $$b \preceq a \setminus b \iff a \cdot b \preceq c \iff a \preceq c \,/\, b$$

  (в присутствии операций деления умножение автоматически оказывается монотонным относительно $\preceq$ (Lambek 1958));

- моноид с делениями называется *решёткой с делениями,* если предпорядок $\preceq$ задаёт структуру решётки, т.е. для любых двух a, b существуют $a \vee b = \sup_{\preceq}\{a, b\}$ и $a \wedge b = \inf_{\preceq}\{a, b\}$;

- решётка с делениями является *решёткой Клини с делениями,* если на ней дополнительно определена операция итерации, удовлетворяющая следующим условиям:

  1. $\mathbf{1} \preceq a$ и $aa^* \preceq a^*$ для всех a;
  2. для любого b если $\mathbf{1} \preceq b$ и $ab \preceq b$, то $a^* \preceq b$.

- решётка Клини с делениями называется **-непрерывной,* если $a^* = \sup\{a^n \mid n \geq 0\}$ для всех a.

Решётки формальных языков и бинарных отношений *-непрерывны.

Рассмотрим высказывания вида $\alpha \preceq \beta$, где α и β — термы (формулы), построенные из переменных (и константы $\mathbf{1}$) с помощью введённых выше операций. Под *атомарной,* или (ин)эквациональной, *теорией* данного класса алгебраических структур понимается множество таких высказываний, истинных в любой структуре из данного класса при любой интерпретации переменных элементами этой структуры.

Атомарная теория класса всех решёток с делениями аксиоматизируется *мультипликативно-аддитивным исчислением Ламбека* **MALC** (Ono 1993):

$$\overline{A \preceq A}$$

$$\frac{\Pi \preceq A \quad \Gamma, B, \Delta \preceq C}{\Gamma, \Pi, A \setminus B, \Delta \preceq C} \qquad \frac{A, \Pi \preceq B}{\Pi \preceq A \setminus B}$$

$$\frac{\Pi \preceq A \quad \Gamma, B, \Delta \preceq C}{\Gamma, B \,/\, A, \Pi, \Delta \preceq C} \qquad \frac{\Pi, A \preceq B}{\Pi \preceq B \,/\, A}$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Delta \preceq C}{\Gamma, A \cdot B, \Delta \preceq C} \qquad \frac{\Gamma \preceq A \quad \Delta \preceq B}{\Gamma, \Delta \preceq A \cdot B}$$

$$\frac{\Gamma, \Delta \preceq C}{\Gamma, \mathbf{1}, \Delta \preceq C} \qquad \frac{}{\Lambda \preceq \mathbf{1}}$$

$$\frac{\Gamma, A_1, \Delta \preceq C \quad \Gamma, A_2, \Delta \preceq C}{\Gamma, A_1 \vee A_2, \Delta \preceq C} \qquad \frac{\Pi \preceq A_i}{\Pi \preceq A_1 \vee A_2}\ ,\ i = 1, 2$$

$$\frac{\Gamma, A_i, \Delta \preceq C}{\Gamma, A_1 \wedge A_2, \Delta \preceq C}\ ,\ i = 1, 2 \qquad \frac{\Pi \to A_1 \quad \Pi \preceq A_2}{\Pi \preceq A_1 \wedge A_2}$$

Здесь исчисление представлено в генценовском секвенциальном виде: правая часть секвенции — это формула, левая — последовательность формул. Непустая последовательность $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ интерпретируется как $\alpha_1 \cdot \ldots \cdot \alpha_n$; пустая последовательность (обозначается Λ) — как $\mathbf{1}$. Правила вывода без посылок — это аксиомы.

Атомарная теория класса всех решёток Клини с делениями аксиоматизируется исчислением **ACT** (“action logic”), которое получается из **MALC** добавлением следующих аксиом и правил (Pratt 1991):

$$\frac{}{\Lambda \preceq A^*} \qquad \frac{\Gamma \preceq A \quad \Delta \preceq A^*}{\Gamma, \Delta \preceq A^*} \qquad \frac{\Lambda \preceq B \quad A, B \preceq B}{A^* \preceq B} \qquad \frac{\Pi \preceq A \quad \Gamma, A, \Delta \preceq C}{\Gamma, \Pi, \Delta \preceq C}\ (\mathrm{cut})$$

Атомарная теория класса *-непрерывных решёток Клини с делениями аксиоматизируется исчислением $\mathbf{ACT}_\omega$ (“infinitary action logic”), которое получается из **MALC** добавлением следующих аксиом и правил (Buszkowski 2007); A^n означает $A, \ldots, A$ (n раз), $A^0 = \Lambda$:

$$\frac{\big(\Gamma, A^n, \Delta \preceq C\big)_{n=0}^{\infty}}{\Gamma, A^*, \Delta \preceq C} \qquad \frac{\Pi_1 \preceq A \quad \ldots \quad \Pi_n \preceq A}{\Pi_1, \ldots, \Pi_n \preceq A^*}\ ,\ n \geq 0$$

Выводы в этом исчислении — бесконечные деревья, не имеющие бесконечно длинных ветвей (но бесконечно ветвящиеся в точках применения правила со счётным числом посылок).

Правило сечения (cut) в $\mathbf{ACT}_\omega$ (и, следовательно, в **MALC**) устранимо (Palka 2007); поэтому оно не включено в приведённые выше формулировки этих исчислений. Для **ACT** исчисления без сечения неизвестно.

2 Научные результаты

1. Известно, что алгоритмическая проблема выводимости в $\mathbf{ACT}_\omega$ является Π_1^0-трудной (Buszkowski 2007), в частности — не рекурсивно перечислимой. Из этого следует, что $\mathbf{ACT}_\omega$ строго сильнее **ACT** (последняя перечислима), т.е. существует секвенция, доказуемая в $\mathbf{ACT}_\omega$ но не в **ACT**.

Построен явный пример такой секвенции:

$$(p \wedge q \wedge (p \setminus q) \wedge (p \,/\, q))^+ \preceq p$$

(a^+ — сокращение для aa^*).

2. Для фрагмента **MALC** без $\vee$ и $\mathbf{1}$ (обозначаемого $\mathbf{MALC}(\cdot, \setminus, /, \wedge)$) известны результат о полноте относительно интерпретации на бинарных отношениях (Andréka & Mikulás 1994) и частичные результаты о полноте относительно языковых моделей (Пентус 1995 для $\mathbf{MALC}(\cdot, \setminus, /)$; Buszkowski 1982 для $\mathbf{MALC}(\setminus, /, \wedge)$).

Доказано, что при добавлении к этому фрагменту итерации Клини полнота пропадает — а именно, секвенция

$$(s \,/\, (r \,/\, r)) \wedge (s \,/\, (p^+ \wedge q^+)) \preceq s \,/\, (p^* \wedge q^*)$$

истинна во всех дистрибутивных решётках Клини с делениями (в частности, решётках формальных языков и решётках бинарных отношений), но не доказуема в $\mathbf{ACT}_\omega$.

Результаты пп. **1** и **2** доложены на конференции Advances in Modal Logic (AiML 2018, Берн, 27–31 августа 2018 г.); статья (с полными доказательствами) опубликована в сборнике трудов конференции [1].

3. Известно, что если теория над некоторой логической системой допускает алгоритмически разрешимую аксиоматизацию, то множество теорем этой теории рекурсивно перечислимо. Для большинства «разумных» логических систем верно и обратное, что доказывается с помощью так называемого *трюка Крейга* (Craig 1953). Тем не менее, для субструктурных логик трюк Крейга в явном виде может не работать. В связи с этим возникает вопрос — существует ли «естественная» субструктурная логика, над которой не всякая рекурсивно перечислимая теория допускает разрешимую аксиоматизацию?

Доказано, что таковой логикой является исчисление Ламбека (во фрагменте со связками $\backslash$, $/$, $\cdot$), с дополнительным ограничением непустоты левых частей секвенций. Это ограничение было введено ещё у Ламбека (1958) и мотивировано лингвистическими приложениями.

Результат п. **3** входит в совместную статью [3], опубликованную в Logic Journal of the IGPL.

4. В то время как для $\mathbf{ACT}_\omega$ алгоритмическая проблема выводимости Π_1^0-трудна и, следовательно, неразрешима, для $\mathbf{ACT}$ алгоритмическая разрешимость оставалась открытой проблемой (Pratt 1991, Kozen 1994, Buszkowski 2017).

Доказано, что проблема выводимости для $\mathbf{ACT}$ алгоритмически неразрешима.

Результат п. **4** доложен на семинаре «Теория доказательств» (МИАН, рук. — чл.-корр. РАН Л. Д. Беклемишев) и изложен в статье, поданной на конференцию Logic in Computer Science (LICS 2019).

5. Доказано, что фрагмент $\mathbf{MALC}$ без $\mathbf{1}$ и $\wedge$ (т.е. $\mathbf{MALC}(\cdot, \backslash, /, \vee)$) неполон относительно как моделей на формальных языках, так и моделей на бинарных отношениях.

Результат п. **5** доложен на объединённом семинаре «Логические проблемы информатики» и «Модальная и алгебраическая логика» (мехмат МГУ) и планируется к включению в одну из будущих статей.

6. Доказана Π_1^0-полнота фрагмента $\mathbf{ACT}_\omega$ без $\vee$ и $\wedge$ (системы $\mathbf{ACT}_\omega(\cdot, \backslash, /, {}^*)$, т.е. исчисление Ламбека, обогащённого операцией итерации). Этот вопрос был оставлен у Бушковского как открытая проблема. В качестве технического средства для этой задачи было доказано, что всякий контекстно-свободный язык без пустого слова задаётся $\mathbf{MALC}(\cdot, \backslash, /)$-грамматикой с однозначным присвоением типов. Ранее такой результат был известен только для варианта с требованием непустоты левых частей секвенций (Сафиуллин 2007).

Результат п. **6** будет доложен на Новогодней сессии МИАН–ПОМИ; готовится журнальная статья.

Также написаны две работы в соавторстве, посвящённые приложениям вариантов исчисления Ламбека и линейной логики [2, 4].

3 Примерный план на 2019 г.

В 2019 г. планируется продолжить исследование некоммутативной линейной логики (исчисления Ламбека и её расширений). Некоторые из планируемых результатов таковы:

1. Усилить результат о неразрешимости $\mathbf{ACT}$, перенеся его на фрагмент, где оставлена только одна из операций $\vee$, $\wedge$.

2. В дополнение к неразрешимости $\mathbf{ACT}$, установить точную сложностную оценку (Σ_1^0-полнота).

3. (совместная работа со С. О. Сперанским) В исчислении Ламбека не допускаются структурные правила сокращения, ослабления и перестановки. В духе линейной логики Жирара, можно обогатить исчисление Ламбека (и, следовательно, его расширение $\mathbf{ACT}_\omega$) новой связкой "!" (экспоненциальная модальность), со следующими правилами вывода:

$$\frac{\Gamma, A, \Delta \preceq C}{\Gamma, !A, \Delta \preceq C} \qquad \frac{!A_1, \ldots, !A_n \preceq B}{!A_1, \ldots, !A_n \preceq !B}$$

$$\frac{\Gamma, !A, !A, \Delta \preceq C}{\Gamma, !A, \Delta \preceq C}\ (\mathrm{contr}) \quad \frac{\Gamma, \Delta \preceq C}{\Gamma, !A, \Delta \preceq C}\ (\mathrm{weak}) \quad \frac{\Gamma, \Phi, !A, \Delta \preceq C}{\Gamma, !A, \Phi, \Delta \preceq C}\ (\mathrm{perm}_1) \quad \frac{\Gamma, !A, \Phi, \Delta \preceq C}{\Gamma, \Phi, !A, \Delta \preceq C}\ (\mathrm{perm}_2)$$

Известно (Lincoln et al. 1991), что для **MALC** такое расширение алгоритмически неразрешимо, точнее — Σ^0_1-полно. Планируется доказать, что для $\mathbf{ACT}_\omega$ соответствующее расширение Π^1_1-полно, а также выявить естественные фрагменты, чьи классы сложности — Π^0_1 и Π^0_2.

4. (совместная работа с М. Р. Пентусом) Помимо экспоненциальной модальности, рассматриваются также субэкспоненциальные модальности, допускающие не все, а только некоторые из правил (contr), (weak), (perm). Для большинства из этих известны точные оценки алгоритмической сложности соответствующих расширений **MALC**. Планируется закрыть одно из оставшихся белых пятен: построить полиномиальный по времени работы алгоритм для расширения исчисления Ламбека только с одной операцией деления с помощью субэкспоненциальной модальности, разрешающей только правило (weak). Заметим, что для самого исчисления Ламбека с одним делением полиномиальный алгоритм известен (Саватеев 2007), как и для исчисления Ламбека с одним делением, где правило (weak) разрешено для всех формул (А. Е. и М. Р. Пентусы 2012).

Этот список не исчерпывающий — в нём упомянуты только те задачи, в которых есть сильная уверенность в успехе.

4 Публикации

[1] S. Kuznetsov. *-continuity vs. induction: divide and conquer. In: Advances in Modal Logic, vol. 12, College Publications, London, 2018, pp. 465–482.
`http://www.mi-ras.ru/~sk/wissenschaft/aiml18_divide_and_conquer_revised_with_bib.pdf`

[2] M. Kanovich, S. Kuznetsov, V. Nigam, A. Scedrov. A logical framework with commutative and non-commutative subexponentials. In: Automated Reasoning (IJCAR 2018, Oxford, July 14–17, 2018), Lect. Notes in Comput. Sci. vol. 10900, Springer, 2018, pp. 228–245.
DOI: 10.1007/978-3-319-94205-6_16 `http://nigam.info/docs/ijcar18.pdf`

[3] S. Kuznetsov, V. Lugovaya, A. Ryzhova. Craig's trick and a non-sequential system for the Lambek calculus and its fragments. Log. J. IGPL, jzy037 (опубликована online), 15 pp., 2018.
DOI: 10.1093/jigpal/jzy037
preprint: `http://www.mi-ras.ru/~sk/wissenschaft/Craig_IGPL_submit.pdf`

[4] G. Morrill, S. Kuznetsov, M. Kanovich, A. Scedrov. Bracket induction for Lambek calculus with bracket modalities. In: Formal Grammar 2018 (Sofia, August 11–12, 2018), Lect. Notes in Comput. Sci. vol. 10950, Springer, 2018, pp. 84–101.
DOI: 10.1007/978-3-662-57784-4_5
`http://fg.phil.hhu.de/2018/papers/FG2018-Morrill-Kuznetsov-Kanovich-Scedrov.pdf`

Также в 2018 г. вышла в электронной публикации статья, поданная в 2017 г.:

[5] M. Kanovich, S. Kuznetsov, V. Nigam, A. Scedrov. Subexponentials in non-commutative linear logic. Math. Struct. Comput. Sci., FirstView (опубликована online), 33 p., 2018.
DOI: 10.1017/S0960129518000117 arXiv: 1709.03607

5 Конференции

- 9th International Joint Conference on Automated Reasoning (IJCAR 2018), Оксфорд, 14–17 июля. [2]
- 23rd Conference on Formal Grammar (FG 2018), София, 11–12 августа. [4]
- Advances in Modal Logic (AiML) 2018, Берн, 27–31 августа. [1]
- Формальная философия (FormPhil 2018), Москва, 1–2 октября.
- Мальцевские чтения 2018, Новосибирск, 19–22 ноября.

6 Преподавательская деятельность

В 2018 г. разработаны и впервые прочитаны два новых курса:

- Функциональное программирование [язык Haskell], факультет компьютерных наук НИУ ВШЭ, 4-й курс бакалавриата «Прикладная математика и информатика»
- Автоматизированная проверка доказательств и верификация алгоритмов [система Coq], факультет компьютерных наук НИУ ВШЭ, 4-й курс бакалавриата «Прикладная математика и информатика»

Также продолжено преподавание:

- Дискретная математика для разработки алгоритмов и программ (на английском языке), факультет компьютерных наук НИУ ВШЭ, 1-й год магистратуры;
- компьютерный практикум по автоматизированной проверке доказательств [система Coq] (обязательный практикум для студентов-логиков 3-го курса, мехмат МГУ;
- спецкурс «Математическая логика» (обязательный курс для студентов-логиков 3-го курса, мехмат МГУ; совместно с проф. чл.-корр. Л. Д. Беклемишевым, доц. В. Н. Крупским, проф. М. Р. Пентусом, доц. Т. Л. Яворской);
- семинарские занятия по курсу «Введение в математическую логику и теорию алгоритмов» для студентов-математиков 2-го курса, мехмат МГУ (лектор — проф. В. Б. Шехтман);
- просеминар по математической логике и информатике (совместно с проф. чл.-корр. Л. Д. Беклемишевым, проф. акад. А. Л. Семёновым, к. ф.-м. н. Ф. Н. Пахомовым);
- кружки Малого мехмата.

Научное руководство студентами: Е. Фофанова (мехмат МГУ, 6-й курс); М. Вишникин, А. Миляева, И. Святкин (мехмат МГУ, 4-й курс); М. Валинкин (мехмат МГУ, 3-й курс).