Отчёт по гранту «Молодая математика России» за 2020 г.

С. Л. Кузнецов

Введение

В 2020 г. С. Л. Кузнецов продолжил исследования субструктурных логических систем, основанных на некоммутативной интуиционистской линейной логике (исчислении Ламбека). Кратко напомним их формулировки.

Формулы строятся из переменных ($p, q, r, \ldots$ — всего счётный набор) и, возможно, констант $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$, с помощью следующих операций: $\backslash$, $/$ (деления), $\cdot$ (умножения), $\vee$, $\wedge$ («решёточные» операции), * (звёздочка Клини), а также семейства субэкспоненциальных модальностей $!^s$ (где s берётся из некоторого семейства индексов $\mathcal{I}$). Секвенции — выражения вида $\Gamma \vdash A$, где A — формула, Γ — последовательность формул (возможно, пустая).

В семействе индексов $\mathcal{I}$ для субэкспоненциальных модальностей выделяются подмножества $\mathcal{W}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{E}$, при этом $\mathcal{W} \cap \mathcal{C} \subseteq \mathcal{E}$. Если одновременно используется более одной субэкспоненциальной модальности, на $\mathcal{I}$ может быть задан частичный порядок $\prec$ (в частности, это отношение может быть пустым, тогда модальности считаются независимыми); при этом множества $\mathcal{W}$, $\mathcal{C}$ и $\mathcal{E}$ замкнуты вверх относительно $\prec$.

Аксиомы и правила вывода суть следующие:

$$\frac{}{A \vdash A} \qquad \frac{}{\Gamma, \mathbf{0}, \Delta \vdash C} \qquad \frac{}{\vdash \mathbf{1}} \qquad \frac{\Gamma, \Delta \vdash C}{\Gamma, \mathbf{1}, \Delta \vdash C} \qquad \frac{\Pi \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Pi, \Delta \vdash A \cdot B} \qquad \frac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, A \cdot B, \Delta \vdash C}$$

$$\frac{A, \Pi \vdash B}{\Pi \vdash A \backslash B} \qquad \frac{\Pi \vdash A \quad \Gamma, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, \Pi, A \backslash B, \Delta \vdash C} \qquad \frac{\Pi, A \vdash B}{\Pi \vdash B / A} \qquad \frac{\Pi \vdash A \quad \Gamma, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B / A, \Pi, \Delta \vdash C}$$

$$\frac{\Pi \vdash A}{\Pi \vdash A \vee B} \qquad \frac{\Pi \vdash B}{\Pi \vdash A \vee B} \qquad \frac{\Gamma, A, \Delta \vdash C \quad \Gamma, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, A \vee B, \Delta \vdash C}$$

$$\frac{\Pi \vdash A \quad \Pi \vdash B}{\Pi \vdash A \wedge B} \qquad \frac{\Gamma, A, \Delta \vdash C}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash C} \qquad \frac{\Gamma, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, A \wedge B, \Delta \vdash C}$$

$$\frac{!^{s_1} A_1, \ldots, !^{s_n} A_n \vdash B}{!^{s_1} A_1, \ldots, !^{s_n} A_n \vdash !^s B}\ (s_i \succcurlyeq s) \qquad \frac{\Gamma, A, \Delta \vdash C}{\Gamma, !^s A, \Delta \vdash C} \qquad \frac{\Gamma, \Delta \vdash C}{\Gamma, !^w A, \Delta \vdash C}\ (w \in \mathcal{W})$$

$$\frac{\Gamma, !^c A, \Pi, !^c A, \Delta \vdash C}{\Gamma, !^c A, \Pi, \Delta \vdash C}\ (c \in \mathcal{C}) \qquad \frac{\Gamma, !^c A, \Pi, !^c A, \Delta \vdash C}{\Gamma, \Pi, !^c A, \Delta \vdash C}\ (c \in \mathcal{C})$$

$$\frac{\Gamma, \Pi, !^e A, \Delta \vdash C}{\Gamma, !^e A, \Pi, \Delta \vdash C}\ (e \in \mathcal{E}) \qquad \frac{\Gamma, !^e A, \Pi, \Delta \vdash C}{\Gamma, \Pi, !^e A, \Delta \vdash C}\ (e \in \mathcal{E})$$

Наконец, для итерации Клини * существуют две аксиоматизации — более сильная, с ω-правилом:

$$\frac{\Pi_1 \vdash A \quad \ldots \quad \Pi_n \vdash A}{\Pi_1, \ldots, \Pi_n \vdash A^*}\ (n \geqslant 0) \qquad \frac{\bigl(\Gamma, A^n, \Delta \vdash C\bigr)_{n=0}^{\infty}}{\Gamma, A^*, \Delta \vdash C}$$

и более слабая, индуктивная:

$$\frac{}{\vdash A^*} \qquad \frac{\Pi \vdash A \quad \Delta \vdash A^*}{\Pi, \Delta \vdash A^*} \qquad \frac{\vdash B \quad A, B \vdash B}{A^* \vdash B} \qquad \frac{\Pi \vdash A \quad \Gamma, A, \Delta \vdash C}{\Gamma, \Pi, \Delta \vdash C}\ \mathrm{cut}$$

Отметим, что правило сечения (cut) неустранимо только в системах с индуктивной аксиоматизацией для итерации Клини. В остальных случаях верна теорема об устранении сечения.

Также рассматривается коммутативный случай, с правилом перестановки $\dfrac{\Gamma, A, B, \Delta \vdash C}{\Gamma, B, A, \Delta \vdash C}$.

Исчисление с полным набором операций и с ω-правилом обладает крайне высокой сложностью: оно Π^1_1-полно (Кузнецов, Сперанский 2019), т.е., в частности, множество гёделевых номеров его теорем нельзя задать арифметической формулой. С индуктивной аксиоматикой также получаем максимальную возможную сложность среди перечислимых теорий, Σ^0_1-полноту (Линкольн и др. 1992; Кузнецов 2019).

Изучались подсистемы описанных выше полных систем, получаемые ограничением набора операций и констант.

Для подсистем без субэкспоненциальных модальностей имеются естественные классы алгебраических моделей: решётки Клини с делениями и их редукты. Системам с ω-правилом соответствует подкласс *-непрерывных решёток Клини с делениями. Примеры таких алгебраических структур — алгебра формальных языков (над некоторым алфавитом) и алгебра бинарных отношений (на некотором множестве). В отсутствие экспоненциальной модальности теория с ω-правилом оказывается более простой, а именно, Π^0_1-полной (Бушковский, Палька 2007), т.е. обладает максимальной сложностью среди дополнений к перечислимым множествам.

Рассматривались также системы с так называемым ламбековым ограничением — требованием непустоты левой части секвенции. В таких системах не используются субэкспоненциалы, а итерация Клини заменяется положительной итерацией $A^+ = A \cdot A^*$, с соответствующим изменением правил.

1 Результаты, полученные в 2020 г.

1. Логика коммутативных *-непрерывных решёток Клини с делениями [10]. Доказано, что задача выводимости в коммутативном варианте системы с операциями $\backslash, /, \cdot, \vee, \wedge, {}^*$, с ω-правилом, Π^0_1-полна. Тем самым получен коммутативный вариант результатов Бушковского и Пальки (2007). При этом доказательство нижней оценки (Π^0_1-трудности) опирается на другую идею — кодирование неостанова 2-счётчиковых машин.

2. Логика полугрупп с делениями и итерацией (с дополнительным правилом) [6]. В 2019 г. была доказана Σ^0_1-полнота для исчисления с индуктивными правилами, с операциями $/$, $\cdot$, *, и одной из $\vee$ и $\wedge$. В этом году получен аналогичный, но более сильный результат для системы без $\vee$ и $\wedge$, но с ламбековым ограничением и дополнительным правилом

$$\frac{A \vdash B \quad A, A^+ \vdash B}{A^+ \vdash B}$$

В присутствии $\vee$ или $\wedge$ это правило выводимо, однако доказано, что это не так в языке с операциями $/, \cdot, {}^+$. Для этого построен пример полугруппы с делениями и положительной итерацией, в которой есть такие элементы a и b, что $a \preceq b$, $a \cdot a^+ \preceq b$, но при этом $a^+ \not\preceq b$. (При наличии $\vee$ такое невозможно, т.к. $a^+ = a \vee (a \cdot a^+)$).

3. Кодирование машин Тьюринга в системах с итерацией и субэкспоненциалами [11]. Построено естественное кодирование бесконечных вычислений на машинах Тьюринга в исчислении с итерацией Клини и субэкспоненциалами, допускающими только правила перестановки и ослабления. При этом данное исчисление лежит в классе Π^0_1, а не Π^1_1 (за счёт отсутствия правила сокращения). С помощью этого кодирования доказана Π^0_1-трудность фрагмента с операциями $\backslash$, $\cdot$, *, $!^p$, $!^{wp}$ (где $!^p$ допускает перестановку, а $!^{wp}$ — перестановку и ослабление). Этот результат не следует из ранее известных результатов о Π^0_1-трудности (в которых нужны либо «решёточные» операции, либо оба деления), и использует существенно другую технику. Планируется усилить этот результат, избавившись от использования операции $\cdot$.

4. Формулы ограниченной глубины под знаком субэкспоненциала. Совместный результат с С. М. Дудаковым и Б. Н. Карловым. Рассматривается система с одним субэкспоненциалом $!^r$, где $r \in \mathcal{E} \cap \mathcal{C}$ и $r \notin \mathcal{W}$ (т.н. релевантная модальность), другие операции: $\backslash$, $/$, $\cdot$ (нет «решёточных» операций и итерации Клини). В общем случае задача выводимости в такой системе алгоритмически неразрешима (Канович и др. 2016), и для этого достаточно рассматривать под знаком $!^r$ формулы глубины вложенности делений $\leqslant 2$ (точнее, формулы вида $p \,/\, (q \,/\, r)$ и $(p \,/\, q) \,/\, r$). Доказано, что если под знаком $!^r$ разрешить только формулы глубины $\leqslant 1$, вида $q_m \setminus \ldots \setminus q_1 \setminus p \,/\, r_n \,/\, \ldots \,/\, r_1$ (где $\setminus$ ассоциируется направо, а $/$ налево), то задача выводимости становится алгоритмически разрешимой и принадлежит классу NP. При этом эта задача NP-трудна даже в языке $/, !^r$ (при этом само исчисление Ламбека с одним делением полиномиально разрешимо, Саватеев 2009).

5. Экспоненциал с ограничением на глубину и звёздочка Клини [7]. К предыдущему результату примыкает результат о верхней оценке сложности Π_1^0 для системы с итерацией Клини и экспоненциальной модальностью, которую разрешается применять только к формулам глубины вложенности делений $\leqslant 1$ (при этом под знаком экспоненциала могут использоваться только операции делений). В дальнейшем планируется распространить этот результат также на релевантную модальность $!^r$.

6. Дистрибутивность без $\wedge$ в коммутативном и аффинном случае [9] Совместный результат с М. И. Кановичем и А. Щедровым. Ранее (2019 г.) было построено следствие закона дистрибутивности ($(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$) в языке без $\wedge$ (но с операциями деления), невыводимое в системе без закона дистрибутивности. В этом году результат обобщен на коммутативную систему и на аффинную систему (в которой правило ослабления разрешается для произвольных формул). При этом доказано, что в системе с $\wedge$, но без $\vee$ таких формул не существует.

7. Теории алгебр формальных языков с единицей [9] Совместный результат с М. И. Кановичем и А. Щедровым. Исчисление с константой $\mathbf{1}$, в присутствии $\setminus$ и $\wedge$, неполно относительно естественных интерпретаций как на алгебре формальных языков, так и на её подалгебре, состоящей из регулярных языков (т.е. языков, задаваемых регулярным выражениями). Доказано, что атомарные теории (множества истинных секвенций) для этих двух классов алгебр не совпадают, т.к. первая Σ_1^0-трудна (но неизвестно, перечислима ли она), а вторая принадлежит классу сложности Π_1^0.

2 Публикации

Работы, опубликованные в 2020 г.:

[1] M. Kanovich, S. Kuznetsov, A. Scedrov. Reconciling Lambek's restriction, cut-elimination, and substitution in the presence of exponential modalities. *Journal of Logic and Computation,* 30(1), 239–256, 2020.

[2] С. Л. Кузнецов, Н. С. Рыжкова. Ограниченный фрагмент исчисления Ламбека с операциями итерации и пересечения. *Алгебра и логика,* 59(2), 190–214, 2020.

[3] M. Kanovich, S. Kuznetsov, V. Nigam, A. Scedrov. Soft subexponentials and multiplexing. In: *Automated Reasoning, IJCAR 2020*, Part I, Lect. Notes in Comput. Sci. vol. 12166, Springer, 2020, pp. 500–517.

[4] S. Kuznetsov. Complexity of the infinitary Lambek calculus with Kleene star. *Review of Symbolic Logic*, 2020, опубликовано в электронном виде, DOI: 10.1017/S1755020320000209

[5] M. Kanovich, S. Kuznetsov, A. Scedrov. The multiplicative-additive Lambek calculus with subexponential and bracket modalities. *Journal of Logic, Language, and Information*, 2020, опубликовано в электронном виде, DOI: 10.1007/s10849-020-09320-9

[6] S. Kuznetsov. The 'long rule' in the Lambek calculus with iteration: undecidability without meets and joins. In: *AiML 2020*, Advances in Modal Logic vol. 13, College Publications, London, 2020, pp. 425–449.

[7] S. L. Kuznetsov. A Π_1^0-bounded fragment of infinitary action logic with exponential. In: *Logic, Language, and Security: Scedrov Festschrift,* Lect. Notes in Comput. Sci. vol. 12300, Springer, 2020, pp. 3–16.

Работы, поданные в 2020 г.:

[8] S. Kuznetsov. Action logic is undecidable. Сдана в *ACM Transactions on Computational Logic.* После первого раунда получены положительные отзывы.

[9] M. Kanovich, S. Kuznetsov, A. Scedrov. Language models for some extensions of the Lambek calculus. Принята к публикации в *Information and Computation.*

[10] S. Kuznetsov. Complexity of commutative infinitary action logic. *DaLí 2020 Postproceedings,* в серии *Lecture Notes in Computer Science,* Springer. Принята к публикации.

[11] S. L. Kuznetsov. Kleene star, subexponentials without contraction, and infinite computations. Сдана в *Сибирские электронные математические известия.*

[12] S. L. Kuznetsov, S. O. Speranski. Infinitary action logic with exponentiation. Сдана в *Annals of Pure and Applied Logic.*

3 Участие в конференциях и школах

- Advances in Modal Logic (AiML) 2020, дистанционно (оргкомитет в Хельсинки, Финляндия), 24–28 августа 2020 г.: доклад “The ‘long rule’ in the Lambek calculus with iteration: undecidability without meets and joins”;
- 3rd DaLí Workshop — Dynamic Logic: New Trends and Applications, дистанционно (оргкомитет в Праге, Чехия), 9–10 октября 2020 г.: доклад “Complexity of commutative infinitary action logic”;
- 10th International Joint Conference on Automated Reasoning (IJCAR 2020), дистанционно (оргкомитет в Париже, Франция), 1–4 июля 2020 г.: доклад “Soft subexponentials and multiplexing”, совместный с М. Кановичем, В. Нигамом и А. Щедровым;
- Мальцевские чтения 2020, дистанционно (оргкомитет в Новосибирске), 16–20 ноября 2020 г.: доклад „Фрагмент исчисления Ламбека с релевантной модальностью“, совместный с С. М. Дудаковым и Б. Н. Карловым.

4 Работа в научных центрах и международных группах

Запланированная на июль 2020 г. поездка в Пенсильванский университет (Филадельфия, США) для совместной научной работы с проф. А. Щедровым не состоялась из-за мер противодействия коронавирусной инфекции. Совместные исследования продолжены дистанционно, подготовлено и опубликовано несколько статей в соавторстве.

5 Педагогическая деятельность

Существенно обновлена и переработана вторая часть спецкурса «Математическая логика» — обязательного спецкурса для студентов 3-го курса кафедры математической логики и теории алгоритмов мехмата МГУ — см. `http://www.mi-ras.ru/~sk/lehre/matlog2020/`. Разработка и чтение этого спецкурса в весеннем полугодии 2020 г. поддержана грантом фонда «Базис».

Совместно с Д. С. Шамкановым в осеннем полугодии 2020 г. в МИАН читается новый спецкурс «Циклические доказательства», `http://www.mathnet.ru/conf1821`.

Также продолжено преподавание курсов: компьютерный практикум по автоматизированной проверке доказательств (мехмат МГУ, 3-й курс); функциональное программирование (ФКН НИУ ВШЭ, 4-й курс); дискретная математика для разработки алгоритмов и программ (ФКН НИУ ВШЭ, 1-й курс магистратуры, на английском языке).

Научное руководство студентами в 2020 г. (с кратким описанием тематики научной работы):

И. Солянкин (магистратура ФКН НИУ ВШЭ, окончил в 2020 г.):
функциональное программирование с линейными типами;

М. Вишникин (мехмат МГУ, 6-й курс):
базовые категориальные грамматики с однозначным присвоением типов;

А. Миляева (мехмат МГУ, 6-й курс):
реализация алгоритмов для поиска соединяющей формулы;

М. Валинкин (мехмат МГУ, 5-й курс):
некоммутативные субструктурные логики с правилом локального сокращения;

И. Святкин (мехмат МГУ, 5-й курс):
формализация исчисления Ламбека и его расширений в Coq;

К. Куценок (мехмат МГУ, 4-й курс):
эффективные алгоритмы для категориальных грамматик с частичной неассоциативностью;

С. Г. Кузнецов (ф-т матем. НИУ ВШЭ, 3-й курс):
алгоритмически разрешимые фрагменты грамматик со скобками и субэкспоненциалом;

П. Артемьев (мехмат МГУ, 3-й курс):
извлечение программного кода из доказательств в Coq (проблема 4 красок);

Ю. Теляковская (мехмат МГУ, 3-й курс):
алгоритмы для контекстно-свободных грамматик.

Итоги трёх лет (2018–2020)

Вспомним основные проблемы, перечисленные в заявке 2017 г., и опишем продвижения по каждой из этих проблем.

1. Алгоритмическая сложность и семантическая полнота расширений исчисления Ламбека с помощью итерации Клини. В этом направлении получены наиболее существенные продвижения. Решена (отрицательно) проблема о разрешимости исчисления Ламбека с аддитивными операциями и итерацией (т.н. «логики действий», action logic), поставленная в работе Д. Козена 1994 г. Также получены результаты о неразрешимости для фрагментов с одной аддитивной операцией (любой из двух) и вообще без аддитивных операций, но с дополнительным правилом для итерации, а также для варианта с законом дистрибутивности. Установлена точная оценка алгоритмической сложности — Σ^0_1-полнота. Результаты верны также для всех рекурсивно перечислимых расширений рассматриваемых логик, вплоть до систем с ω-правилом.

Для фрагмента, где итерация допускается только в знаменателях делений («итерированные деления» в терминологии Седлара), в дополнение к полноте относительно языковых моделей (L-полнота, совместная работа с Н. С. Рыжковой) установлена также полнота относительно реляционных моделей (R-полнота). В общем случае получены результаты о неполноте, основанные на невыводимости закона дистрибутивности и его следствий в более бедных языках: для неполноты достаточно любого из следующих наборов операций: $\{\backslash, \cdot, {}^*, \wedge\}$ и $\{\backslash, /, \vee\}$.

2. Верхняя оценка алгоритмической сложности исчисления Ламбека с экспоненциальной модальностью и итерацией Клини. Ответ на этот вопрос (доказательство принадлежности задачи к классу сложности Π^1_1) получил С. О. Сперанский.

3. Исчисление Ламбека со скобками и скобочными модальностями. (Совместная работа с М. И. Кановичем, Г. Морриллом и А. Щедровым.) Удалось построить несколько эффективных алгоритмов для проверки выводимости. Во-первых, доказано, что задача проверки выводимости в исчислении со скобками и связанной с ними субэкспоненциальной модальностью при условии т.н. bracket non-negative condition принадлежит классу PSPACE в общем случае и классу NP для фрагмента без $\vee$ и $\wedge$ (это лучшая из возможных оценок, поскольку такова же сложность соответствующей базовой системы без скобок и субэкспоненциала). Во-вторых, для системы со скобками, но без субэкспоненциала построен псевдополиномиальный алгоритм проверки выводимости, обобщающий алгоритм Пентуса (2010) для исходного исчисления Ламбека. В-третьих, построен эвристический алгоритм выявления правильной расстановки скобок (чтобы секвенция стала выводимой).

4. Языковые модели для исчисления Ламбека с единицей. Вопрос о структуре теории языковых моделей с ламбековыми операциями $(\backslash, /, \cdot)$ и мультипликативной константой «единица» $(\mathbf{1})$ оказался сложным. В этом направлении получены следующие частичные результаты: во-первых, любая корректная относительно L-моделей логика, включающая некоторые естественные для L-моделей (но не выводимые в исчислении $\mathrm{L}_{\mathbf{1}}$) принципы, алгоритмически неразрешима и Σ_1^0-трудна (совместная работа с М. И. Кановичем и А. О. Щедровым). В частности, такова и L-полная теория, однако для неё неизвестно даже перечислимости (может оказаться, что её сложность ещё выше). Во-вторых, доказано, что эта полная теория всех L-моделей не совпадает с её расширением — теорией L-моделей на регулярных языках. Без константы $\mathbf{1}$, в языке $\{\backslash, /\}$, эти две теории совпадают и аксиоматизируются исчислением Ламбека.

5. Коммутативное исчисление Ламбека. Вопросы о классе языков, задаваемых коммутативным исчислением Ламбека, и о его полноте относительно моделей на подмножествах $\langle \mathbb{N} - \{0\}, + \rangle$ решить не удалось. Однако получены результаты об алгоритмической сложности для расширения коммутативного исчисления Ламбека с помощью итерации Клини (с добавленными аддитивными операциями). А именно, для системы с ω-правилом доказана Π_1^0-полнота, а для системы с индуктивными аксиомами планируется доказать Σ_1^0-полноту (как и в некоммутативном случае).

6. Грамматики с однозначным присвоением типов. Для исчисление Ламбека, допускающего пустые левые части секвенций, доказан аналог теоремы Сафиуллина: всякий контекстно-свободный язык без пустого слова порождается такой грамматикой с однозначным присвоением типов. Этот результат был использован для доказательства Π_1^0-полноты исчисления Ламбека с итерацией Клини (без аддитивных операций), тем самым решена проблема, поставленная в работе В. Бушковского 2007 г. Установить аналог теоремы Сафиуллина для исчисления Ламбека с одним делением $(\mathrm{L}(\backslash))$ не удалось. Возникла гипотеза, что для этого исчисления теорема неверна, и чтобы установить это, достаточно было бы доказать перечислимость соответствующей логики с итерацией Клини, $\mathrm{L}(\backslash, ^*)$. Последнее можно попытаться сделать с помощью техники циклических выводов. Поскольку аналог теоремы Сафиуллина давал бы Π_1^0-трудность этого исчисления, мы бы получили искомое противоречие.

Кроме того, в 2018–2020 гг. были получены результаты, не предполагавшиеся заявкой 2017 г. Отметим некоторые из них.

А. «Трюк Крейга» для вариантов исчисления Ламбека. Для большинства «хорошо устроенных» логических систем имеет место следующее соображение, принадлежащее Крейгу: любая рекурсивно перечислимая теория над данной логикой обладает алгоритмически разрешимой аксиоматизацией. Для доказательства достаточно следующего свойства логики: для каждой формулы φ существует, и может быть алгоритмически найдена, эквивалентная ей формула φ' большего размера. И. Б. Шапировский поставил вопрос о существовании содержательного примера логики, для которой «трюк Крейга» не работает. (Речь идёт о примерах среди реально используемых логик, а не, например, вырожденной системы вообще без правил вывода, в которой любая теория должна совпадать со своей аксиоматикой.) Доказано, что над исчислением Ламбека (с условием непустоты левых частей секвенций) существуют рекурсивно перечислимые теории, не допускающие алгоритмически разрешимой аксиоматизации.

Б. Грамматики Ламбека с дизъюнкцией. Доказано, что категориальные грамматики Ламбека, расширенные операцией $\vee$ (аддитивная дизъюнкция), порождают все конечные пересечения контекстно-свободных языков.

В. Свойства логик с индуктивными правилами для итерации. Доказано, что секвенция $(p \wedge q \wedge (p \setminus q) \wedge (p \,/\, q))^+ \vdash p$ доказуема с помощью ω-правила и с помощью правила «индукция-в-середине»:

$$\frac{A \vdash B \quad A, A \vdash B \quad A, B, A \vdash B}{A^+ \vdash B}$$

но не доказуема с помощью обычной индуктивной аксиоматизации. Доказано, что правило декомпозиции

$$\frac{A \vdash B \quad A, A^+ \vdash B}{A^+ \vdash B}$$

невыводимо без использования $\vee$, $\wedge$ или ω-правила.

Г. Сложность логик с субэкспоненциальными модальностями. Доказано (совместная работа с М. И. Кановичем, В. Нигамом и А. Щедровым), что система с субэкспоненциальной модальностью $!^c$, где $c \in \mathcal{C}$, и операциями $\setminus$ и $\cdot$, обладает Σ_1^0-трудной задачей выводимости. Для фрагментов, где модальность — экспоненциальная ($!^x$, где $x = \mathcal{C} \cap \mathcal{E} \cap \mathcal{W}$) или релевантная ($!^r$, где $r \in \mathcal{E} \cap \mathcal{C}$, $r \notin \mathcal{W}$), применяемая только к формулами вида $q_m \setminus \ldots \setminus q_1 \setminus p \,/\, r_n \,/ \ldots /\, r_1$, в языке с операциями $\setminus$, $/$, $\cdot$, доказана (совместная работа с С. М. Дудаковым, Б. Н. Карловым, Е. М. Фофановой) принадлежность задачи выводимости классу NP. Для $!^x$ вместе с итерацией Клини, с тем же ограничением на формулы под знаком $!^x$, получен результат о принадлежности классу Π_1^0.