Отчет по конкурсу «Молодая математика России» за 2018 год. Ф.Н. Пахомов.

В 2018 году была опубликована моя совместная работа с Александром Запрягаевым [15], а также моя совместная работа с Лукой Мичеком и Младеном Вуковичем [9]. В журнал Review of Symbolic Logic была подана моя совместная работа с Джеймсом Волшем [10] и в журнал Archive for Symbolic Logic была подана моя совместная работа с Али Энаятом [3].

В этом году я участвовал в следующих конференциях:

- "Weak Arithmetics Days 2018" (JAF 37), 28–30 мая, Флоренция, Италия (доклад);
- "Workshop: Proof, Computation", 2–6 июля, Бонн, Германия (приглашенный доклад);
- "Logic Colloquium 2018", 23–28 июля, Удине, Италия (доклад);
- "Workshop on Proof Theory and its Applications", 6–7 сентября, Гент, Бельгия (доклад);
- "Fealora Workshop", 5–7 ноября, Щпиндлерув Млын, Чехия (приглашенный доклад);
- "Мальцевские чтения 2018", 19–22 ноября, Новосибирск, Россия (доклад).

Педагогическая деятельность:

- руководство просеминаром по математической логике на мехмате МГУ (совместно с Л.Д. Беклемишевым, С.Л. Кузнецовым, А.Л. Семёновым);
- чтение спецкурса «Введение в теорию доказательств и ординальный анализ» в научно-образовательном центре МИАН (совместно с Л.Д. Беклемишевым), начиная с осени 2018;
- работа доцентом на матфаке ВШЭ, до лета 2018.

В оставшейся части отчета я расскажу о содержание упомянутых выше четырех работ.

Статья "Reflection ranks and ordinal analysis" [10]

Вопрос о подсчете теоретико-доказательственных ординалов формальных теорий является классическим вопросом изучаемым в теории доказательств. Общая интуиция стоящая за этим понятием состоит в том, что теоретико-доказательственный ординал данной теории это мера силы (чем сильнее теория, тем больше ординал). Г. Генцен подсчитал еще в 1930-х, что теоретико-доказательственный ординал первопорядковой арифметики Пеано PA равен ε_0. Одним из отражений этого факта является то, что непротиворечивость PA может быть доказана трансфинитной индукцией до ординала ε_0 (отметим, что в качестве индуктивной формулы может быть выбрана арифметическая и более того Δ_0 формула). При этом, для любого ординала $\alpha < \varepsilon_0$ теория PA доказывает арифметическую трансфинитную индукцию до ординала α. Таким образом, (в силу 2-ой теоремы Гёделя о неполноте) ε_0 оказывается границей доказуемой трансфинитной индукции в PA и наименьшим ординалом трансфинитной индукцией по которому может быть доказана непротиворечивость PA.

Заметим, что PA является арифметической теорией и в силу этого, в отличие от теории множеств, не может непосредственно работать с ординалами. В силу этого рассматриваются рекурсивные системы ординальных обозначений — вычислимые вполне упорядочивания натурального ряда. Но как оказывается, многие результаты об ординальном анализе чувствительны к выбору конкретной системы ординальных обозначений. В частности, описанный в предыдущем абзаце результат Генцена требует использования "стандартной" системы ординальных обозначений и при подходящем выборе системы обозначений граница доказуемой трансфинитной индукции может оказаться произвольным рекурсивными ординалом $\geq \omega$ [6, 7]. Тем не менее, если рассматривать теории, в рамках которых можно сформулировать утверждение о фундированности данного рекурсивного линейного порядка, то для них можно рассмотреть супремум порядковых типов рекурсивных полных линейных порядков, чья фундированность доказуема в данной теории. Заметим, что это понятие уже не требует фиксации системы ординальных обозначений. На практике оказывается, что для "естественных" теорий и "естественных" систем ординальных обозначений подсчет теоретико-доказательственного ординала в терминах инвариантных и неинвариантных (относительно выбора системы ординальных обозначений) определений дает одинаковый результат. Подробнее об теоретико-доказательственных ординалах можно прочесть в обзоре М. Ратьена [11].

В моей работе с Д. Волшем мы изучали связь инвариантного определения теоретико-доказательственных ординала с принципами рефлексии. Отметим, что возможность выражать неинвариантные определения в терминах принципов рефлексии была обнаружена Беклемишевым [1]. Принципы рефлексии в данном контексте — это схемы $\mathsf{RFN}_{\mathcal{C}}(T)$, утверждающие, что истинно всякое предложение из класса $\mathcal{C}$, доказуемое в теории T. Наиболее слабым принципом рефлексии рассматриваемым для формальной арифметики является Π_1 рефлексия $\mathsf{RFN}_{\Pi_1}(T)$, которая оказывается просто эквивалентна утверждению о непротиворечивости теории T. Отметим, что принцип рефлексии $\mathsf{RFN}_{\mathcal{C}}(T)$ эквивалентно может пониматься как утверждение о корректности теории T относительно класса $\mathcal{C}$, т.е. как усиленный вариант утверждения о непротиворечивости теории T. Естественным образом рефлексия $\mathsf{RFN}_{\mathcal{C}}$ дает порядок $T \prec_{\mathcal{C}} U \overset{\text{def}}{\iff} U \vdash \mathsf{RFN}_{\mathcal{C}}(T)$.

Еще до нашей работы был известен результат о том, что порядок $\prec_{\Pi_1}$, хотя и не является фундированным, но имеет некоторое свойство похожее на фундированность (это было доказано Х. Фридманом, Р. Соловеем и К. Сморинским, см. [12, 8]). Мы же доказали, что для систем в языке арифметики второго порядка порядок $\prec_{\Pi^1_1}$ является фундированным в обычном смысле, в случае своего ограничения на Π^1_1-корректные теории. Также мы получили ряд новых результатов о квази-фундированности порядков для более слабых принципов рефлексии.

Наш результат о фундированности $\prec_{\Pi^1_1}$ дал возможность дать новое инвариантное определение теоретико-доказательственного ординала теории, как фундированного ранга данной теории в порядке $\prec_{\Pi^1_1}$. Также в нашей работе мы сравнили наше определение с определением в терминах супремума порядковых типов доказуемо фундированных рекурсивных полных порядков. Мы вывели точную формулу связывающую теоретико-доказательственные ординалы в этих двух смыслах. В частности из нее следует, что для достаточно сильных теорий эти определения дают одинаковый результат.

Кроме того, используя эту связь мы произвели подсчет теоретико-доказательственных ординалов для теорий трансфинитных итераций Π^1_1-рефлексии. Хотя теории итераций Π^1_1-рефлексии довольно “экзотичны”, больший интерес чем сам результат здесь на мой взгляд представляет разработанная нами техника, которая в дальнейшем может быть использована для изучения более интересных систем в языке арифметики второго порядка.

Статья “Interpretations of Presburger arithmetic in itself” [15]

Арифметика Пресбургера — это истинная первопорядковая теория модели $(\mathbb{N}, +)$. Легко заметить, что в модели $(\mathbb{N}, +)$ первопорядковой формулой $\exists z\ x + z = y$ выражается предикат $x \leq y$ и первопорядковая формула $\forall y\ y + x = y$ определяет константу 0. Таким образом, по-существу нет разницы между рассмотрением первопорядковой теории модели $(\mathbb{N}, +)$ и модели $(\mathbb{N}, +, 0, \leq)$. Эта конструкция является простым примером интерпретации — интерпретацией модели $(\mathbb{N}, +, 0, \leq)$ в модели $(\mathbb{N}, +)$. В общем случае n-мерная интерпретация модели $\mathfrak{A}$ в модели $\mathfrak{B}$ — это первопорядково определимое в $\mathfrak{B}$ множество n-ок на котором первопорядковыми формулами определена структура изоморфная $\mathfrak{A}$. Мы говорим, что набор первопорядковых формул языка теории U задает интерпретацию теории T в теории U, если во всякой модели теории U он задает интерпретацию некоторой модели теории T. Интерпретации широко используются в математической логике как средство сведения результатов об одних теориях к другим.

Многочисленные работы были посвящены изучению интерпретаций между арифметическими теориями в языке первопорядковой арифметики Пеано, т.е. в языке со сложением и умножением. В тоже время интерпретации для арифметики Пресбургера практически не изучались. Моя работа с А.А. Запрягаевым была мотивирована вопросом поставленным А. Виссером о том, может ли арифметика Пресбургера быть интерпретирована в каком-либо своем конечно-аксиоматизированном фрагменте. Этот вопрос интересен в свете того, что известно, что таким свойством обладают сильные теории доказывающие полную схему индукции в своем языке (в частности PA, ZFC), но настоящий момент не ясно переносится ли оно на более слабые теории с полной схемой индукции. Как мы установили в своей работе, арифметика Пресбургера не может быть одномерно проинтепретирована ни в какой своей конечно-аксиоматизируемой подтеории. До этого частичный результат в работе над данной проблемой был достигнут Й. Зутхаутом [16], который показал, что для случая одномерных интерпретаций вопрос Виссера эквивалентен вопросу о том, всякая ли одномерная интерпретация $(\mathbb{N},+)$ в себе определимо изоморфна тождественной.

В нашей работе мы предложили более простое доказательство сведения Зутхаута и обобщили его результат на случай многомерных интерпретаций. Для этого мы доказали, что всякий линейный порядок интерпретируемый в $(\mathbb{N},+)$ является разреженным порядком с конечным рангом Хаусдорфа. Для всякая одномерной интерпретации $(\mathbb{N},+)$ в себе мы построили определимый изоморфизм с тождественной с интерпретацией $(\mathbb{N},+)$ в себе. Тем самым мы доказали, что арифметика Пресбургера не может быть одномерно проинтерпретирована в никакой своей конечной подтеории.

Статья "Complexity of the interpretability logic IL" [9]

Логика интерпретируемости IL является пропозициональной логикой в которой в дополнение к связкам $\wedge, \vee, \to, \neg$ используется унарная связка $\Box$ и бинарная связка $\rhd$. Предполагаемая интерпретация этой логики такова: фиксируется некоторая формальная теория B, содержащая язык первопорядковой арифметики, пропозициональные переменные пробегают предложения в языке B, связки $\wedge, \vee, \to, \neg$ интерпретируются естественным образом, формула $\Box\varphi$ обозначает предложение "φ доказуемо в теории B", а предложение $\varphi \lhd \psi$ обозначает предложение "теория $\mathsf{B}+\varphi$ интерпретирует теорию $\mathsf{B}+\psi$". Логика IL такова, что факты доказуемые в ней оказываются валидны при широком выборе теорий B.

В настоящей работе Л. Мичек, М. Вукович и я изучали вопрос об алгоритмических свойствах логики IL. Мы установили, что эта логика `PSPACE`-полна. Ранее из результата Ф. Боу и Й. Йостена [2] было известно, что эта логика является `PSPACE`-сложной. Отметим, что это первая логика интерпретируемости для которой была доказана `PSPACE`-разрешима.

Статья "Truth, disjunction, and induction" [3]

Еще из классической работы К. Гёделя [4] известно, что в формальной арифметике можно представлять формулы при помощью чисел — число соответствующее данной формуле φ известно как ее геделев номер и обозначается $\ulcorner\varphi\urcorner$. А. Тарский в своей классической работе [13] доказал теорему о невыразимости истины — утверждение о том, что первопорядковой формулой невозможно определить множество всех геделевых номеров истинных предложений. Таким образом, для того, чтобы использовать понятие истинности, данный первопорядковый язык $\mathcal{L}$, содержащий язык формальной арифметики, расширяется предикатом истинности $\top(x)$, который интерпретируется как предикат определяющий множество геделевых номеров всех истинных предложений языка $\mathcal{L}$; отметим, что теорема Тарского показывает, что $\top$ не мог быть выражен в самом $\mathcal{L}$.

Рассмотрим расширения первопорядковой арифметики Пеано PA до теории содержащей предикат истинности $\top(x)$ для языка первопорядковой арифметики. Такие расширения могут содержать различные аксиомы, описывающие свойства предиката истинности. Важной разделяющей чертой между "слабыми" и "сильными" расширениями такого рода является свойство расширения быть консервативным над PA — не доказывать новых арифметических предложений. Видимо самым слабым естественным расширением PA при помощи предиката истинности видимо является теория TB, дополнительными аксиомами которой являются эквивалентности Тарского:

$$\varphi \leftrightarrow \top(\ulcorner\varphi\urcorner), \text{ для всех предложений } \varphi$$

Консервативность TB над PA является тривиальным фактом в силу того, что всякая модель PA может быть расширена до модели TB. Более сильным расширением PA является теория CT^-, дополнительными аксиомами которой являются композиционные аксиомы — утверждения о том, что предикат истинности корректно определен на атомарных формулах и коммутирует со всеми связками и кванторами. Легко видеть, что $\mathsf{TB} \subseteq \mathsf{CT}^-$. Как показали Краевский, Котлярский и Лахлан [5], теория CT^- также консервативно расширяет PA. Но, в отличие от теории TB, этот факт довольно нетривиален; в частности существуют модели PA, которые нельзя расширить до модели CT^-. В тоже время, добавление индукции $\mathsf{I}\Delta_0(\top)$

для формул с ограниченными кванторами и предикатом T уже дает неконсервативную над PA теорию CT_0, которая в частности доказывает непротиворечивость PA (см. [14]).

В данной работе Али Энаят и я установили, что на первый взгляд гораздо более слабое чем CT_0 расширение $\mathsf{CT}^- + \mathsf{DC}$ совпадает с CT_0. А именно, мы рассмотрели аксиому дизъюнктивной корректности DC: для каждой конечной дизъюнкции ее истинность эквивалентна истинности по крайней мере одного из дизъюнктов. Отметим, что принцип коммутации с дизъюнкциями, который является одной из аксиом CT^- слабее чем DC — композиционная аксиома для дизъюнкции гарантирует лишь коммутацию с дизъюнкциями стандартного размера, а в нестандартных моделях арифметики аксиома DC также гарантирует коммутацию с дизъюнкциями нестандартной длины. По-существу наша работа показала, что даже, казалось бы незначительные расширения, теории CT^- уже могут не сохранять свойство консервативности над PA.

Список литературы

[1] Lev Beklemishev. Proof-theoretic analysis by iterated reflection. *Archive for Mathematical Logic*, 42(6):515–552, 2003.

[2] Félix Bou and Joost J Joosten. The closed fragment of il is pspace hard. *Electronic Notes in Theoretical Computer Science*, 278:47–54, 2011.

[3] Ali Enayat and Fedor Pakhomov. Truth, disjunction, and induction. *arXiv preprint arXiv:1805.09890*, 2018.

[4] Kurt Gödel. Über formal unentscheidbare sätze der principia mathematica und verwandter systeme i. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38(1):173–198, Dec 1931.

[5] H. Kotlarski, S. Krajewski, and A.H. Lachlan. Construction of satisfaction classes. *Canad. Math. Bull*, 24:3, 1981.

[6] Georg Kreisel. A survey of proof theory. *The Journal of Symbolic Logic*, 33(3):321–388, 1968.

[7] Georg Kreisel. Wie die Beweistheorie zu ihren Ordinalzahlen kam und kommt. *Jber. Deutsch. Math.-Verein.*, 78:177–223, 1977.

[8] Per Lindström. *Aspects of incompleteness*, volume 10. Cambridge University Press, 2017.

[9] Luka Mikec, Fedor Pakhomov, and Mladen Vuković. Complexity of the interpretability logic IL. *Logic Journal of the IGPL*, page jzy015, 2018.

[10] Fedor Pakhomov and James Walsh. Reflection ranks and ordinal analysis. *arXiv preprint arXiv:1805.02095*, 2018.

[11] Michael Rathjen. The realm of ordinal analysis. *LONDON MATHEMATICAL SOCIETY LECTURE NOTE SERIES*, pages 219–280, 1999.

[12] Craig Smorynski. *Self-reference and modal logic.* Springer Science & Business Media, 2012.

[13] Alfred Tarski. Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. *Studia Philosophica*, 1:261–405, 1936.

[14] Bartosz Wcisło and Mateusz Łełyk. Notes on bounded induction for the compositional truth predicate. *The Review of Symbolic Logic*, 10(3):455–480, 2017.

[15] Alexander Zapryagaev and Fedor Pakhomov. Interpretations of Presburger arithmetic in itself. In Sergei Artemov and Anil Nerode, editors, *Logical Foundations of Computer Science*, pages 354–367, Cham, 2018. Springer International Publishing.

[16] Jetze Zoethout. Interpretations in Presburger arithmetic, 2015.