Отчет по конкурсу «Молодая математика России» за 2019 год.
Ф.Н. Пахомов.

В 2019 году была опубликована моя совместная работа с Альбертом Виссером [8] и моя совместная работа с Али Энаятом [3]. В журнал Journal of Mathematical Logic была подана моя работа [7] и в журнал Annals of Pure and Applied Logic была подана моя совместная работа со Львом Дмитриевичем Беклемишевым [1].

В этом году я участвовал в следующих конференциях:

- “Asian Logic Conference”, 17–21 июня, Нур-Султан, Казахстан (доклад);
- “Logic Colloquium 2019”, 11–16 августа, Прага, Чехия (секционный доклад);
- “Workshop on Proof Theory, Modal Logic and Reflection Principles 2019”, 5–8 ноября, Барселона, Испания (приглашенный доклад).

Педагогическая деятельность:

- руководство просеминаром по математической логике на мехмате МГУ (совместно с Л.Д. Беклемишевым, С.Л. Кузнецовым, А.Л. Семёновым);
- чтение спецкурса «Введение в теорию доказательств и ординальный анализ» в научно-образовательном центре МИАН (совместно с Л.Д. Беклемишевым).

В оставшейся части отчета я расскажу о содержание упомянутых выше четырех работ.

Статья “On a Question of Krajewski’s” [8]
В логике часто встречается феномен консервативности одних формальных систем над другими. Пусть имеются две первопорядковые теории T и U в языках $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2$, соответственно. Говорят, что T_2 является консервативным расширением T, если U имеет теже теоремы в языке $\mathcal{L}_1$, что и T. Примером такой пары теорий служат теория множеств Цермело-Френкеля ZFC и консервативно расширяющая ей второпорядковая теория множеств фон Неймана-Гёделя-Бернайса NGB (теория NGB в дополнение к множествам также говорит и о классах, тем не менее никаких новых утверждений о множествах она не доказывает). Другим достаточно известным примером является пара из первопорядковой арифметики Пеано PA и консервативно расширяющей её теории арифметического свертывания ACA_0. В обоих этих примерах наблюдается довольно распространенная ситуация, когда теория T не является конечно аксиоматизируемой, а консервативно расширяющая её теория U конечно аксиоматизируема. Легко видеть, что если какая-то теория консервативно расширяема до конечно аксиоматизируемой, то сама она неизбежно должна быть перечислимой. Как было установлено в классических работах С.К. Клини [5], а также В. Крейга и Р.Л. Вота [2] для большого класса теорий верно и обратное: для всякой перечислимой теории без конечных моделей можно найти конечно аксиоматизируемое консервативное расширение.

Приведу примерную формулировку вопроса Станислава Краевский, который он задал во время конференции по формальным теория истинности в Варшаве сентябре 2017. Фиксируем перечислимую первопорядковую теорию T не являющуюся конечно аксиоматизируемой. И фиксируем язык $\mathcal{L}_2$ для её консервативных расширений. На конечно аксиоматизируемых теориях U языка $\mathcal{L}_2$, консервативно расширяющих T есть естественный порядок по включению множеств теорем. Вопрос Краевского был о том, бывают ли минимальные элементы в таких порядках — минимальные консервативные расширения.

В работе [8] Альберт Виссер и я исследовали этот вопрос. Мы показали, что если язык $\mathcal{L}_2$ содержит по крайней мере один дополнительный двуместный предикатный символ, то для каждой конечно аксиоматизируемой U консервативно расширяющей T найдется собственная конечно аксиоматизируемая подтеория $U' \subsetneq U$ также консервативно расширяющая T. Более того, мы рассмотрели ряд других естественных порядков на теориях и установили аналогичный результат и для них. В частности, мы доказали отсутствие минимальных элементов в порядке по интерпретируемости с сохранением $\mathcal{L}_1$-предикатов. Отмечу, что видимо этот порядок является более естественным порядком на консервативных расширениях, чем порядок по включению. Кроме того, нами было установлено, что использование двуместных предикатных символов неизбежно необходимо для нашего результата. Мы построили консервативное расширение теории бесконечных линейных порядков, где дополнительные символы языка консервативного расширения лишь одноместные предикатные символы. И показали, что это расширение минимальное в порядке по интерпретируемости с сохранением $\mathcal{L}_1$-предикатов.

Статья “Truth, disjunction, and induction” [3]

Еще из классической работы К. Гёделя [4] известно, что в формальной арифметике можно представлять формулы при помощи чисел — число соответствующее данной формуле φ известно как ее гёделев номер и обозначается $\ulcorner\varphi\urcorner$. А. Тарский в своей классической работе [9] доказал теорему о невыразимости истины — утверждение о том, что первопорядковой формулой невозможно определить множество всех гёделевых номеров истинных предложений. Таким образом, для того, чтобы использовать понятие истинности, данный первопорядковый язык $\mathcal{L}$, содержащий язык формальной арифметики, расширяется предикатом истинности $\top(x)$, который интерпретируется как предикат определяющий множество гёделевых номеров всех истинных предложений языка $\mathcal{L}$; отметим, что теорема Тарского показывает, что $\top$ не мог быть выражен в самом $\mathcal{L}$.

Рассмотрим расширения первопорядковой арифметики Пеано PA до теории содержащей предикат истинности $\top(x)$ для языка первопорядковой арифметики. Такие расширения могут содержать различные аксиомы, описывающие свойства предиката истинности. Важной разделяющей чертой между “слабыми” и “сильными” расширениями такого рода является свойство расширения быть консервативным над PA — не доказывать новых арифметических предложений. Видимо самым слабым естественным расширением PA при помощи предиката истинности видимо является теория TB, дополнительными аксиомами которой являются эквивалентности Тарского:

$$\varphi \leftrightarrow \top(\ulcorner\varphi\urcorner), \text{ для всех предложений } \varphi$$

Консервативность TB над PA является тривиальным фактом в силу того, что всякая модель PA может быть расширена до модели TB. Более сильным расширением PA является теория CT^-, дополнительными аксиомами которой являются композиционные аксиомы — утверждения о том, что предикат истинности корректно определен на атомарных формулах и коммутирует со всеми связками и кванторами. Легко видеть, что $\mathsf{TB} \subseteq \mathsf{CT}^-$. Как показали Краевский, Котлярский и Лахлан [6], теория CT^- также консервативно расширяет PA. Но, в отличие от теории TB, этот факт довольно нетривиален; в частности существуют модели PA, которые нельзя расширить до модели CT^-. В тоже время, добавление индукции $\mathsf{I}\Delta_0(\top)$ для формул с ограниченными кванторами и предикатом $\top$ уже дает неконсервативную над PA теорию CT_0, которая в частности доказывает непротиворечивость PA (см. [10]).

В данной работе Али Энаят и я установили, что на первый взгляд гораздо более слабое чем CT_0 расширение $\mathsf{CT}^- + \mathsf{DC}$ совпадает с CT_0. А именно, мы рассмотрели аксиому дизъюнктивной корректности DC: для каждой конечной дизъюнкции ее истинность эквивалентна истинности по крайней мере одного из дизъюнктов. Отметим, что принцип коммутации с дизъюнкциями, который является одной из аксиом CT^- слабее чем DC — композиционная аксиома для дизъюнкции гарантирует лишь коммутацию с дизъюнкциями стандартного размера, а в нестандартных моделях арифметики аксиома DC также гарантирует коммутацию с дизъюнкциями нестандартной длины. По-существу наша работа показала, что даже, казалось бы незначительные расширения, теории CT^- уже могут не сохранять свойство консервативности над PA.

Статья “Reflection ranks and ordinal analysis” [8]

Вопрос о подсчете теоретико-доказательственных ординалов формальных теорий является классическим вопросом изучаемым в теории доказательств. Общая интуиция стоящая за этим понятием состоит в том, что теоретико-доказательственный ординал данной теории это мера силы (чем сильнее теория, тем больше ординал). Г. Генцен подсчитал еще в 1930-х, что теоретико-доказательственный ординал первопорядковой арифметики Пеано PA равен ε_0. Одним из отражений этого факта является то, что непротиворечивость PA может быть доказана трансфинитной индукцией до ординала ε_0 (отметим, что в качестве индуктивной формулы может быть выбрана арифметическая и более того Δ_0 формула). При этом, для любого ординала $\alpha < \varepsilon_0$ теория PA доказывает арифметическую трансфинитную индукцию до ординала α. Таким образом, (в силу 2-ой теоремы Гёделя о неполноте) ε_0 оказывается границей доказуемой трансфинитной индукции в PA и наименьшим ординалом трансфинитной индукцией по которому может быть доказана непротиворечивость PA.

Один из подходов к получению такого рода результатов основан на примение итерированных схем рефлексии. Схема $\mathcal{C}$-рефлексии для теории T это утверждения о том, что всякое предложение из класса $\mathcal{C}$ доказуемое в T истинно. Добавление к данной теории некоторой рефлексии для неё самой всегда усиливает теорию. Таким образом, схемы рефлексии являются "каноническим" методом усиления теорий. Расширения теорий с помощью схем рефлексии можно итерировать и трансфинитно, вдоль вычислимыв вполне упорядочиваний. Как оказывается, более сильные схемы рефлексии, в некотором смылсе могут быть сведены к трансфинитным итерациям более слабых принципов рефлексии (имеет место частичная консервативность более сильных схем над трансфинитными итерациями более слабых). Такое сведение позволяет произвести подсчет теоретико-доказательственного ординала теорий.

В данной работе Л.Д. Беклемишев и я использовали этот метод ординального анализа для теорий итерированных определений истины. До настоящего момента этот метод применялся только для относительно слабых теорий (арифметики PA и некоторых немного более сильных теорий). Мы расширили этот метод для анализа теорий с итерированными определениями истины. И далее путем редукции к теориям с итерированными определениями истины мы произвели анализ некоторых систем арифметики второго порядка. С технической точки зрения, ключевой частью данной работы было нахождение принципов рефлексии для теорий с итерированными определениями истины для которых имеет место редукция более сильных принципов рефлексии к итерациям более слабых принципов рефлексии.

Статья "A weak set theory that proves its own consistency" [7]

Вторая теорема Гёделя о неполноте [4] говорит о том, что непротиворечивые теории не могут доказать свою собственную непротиворечивость. Для того, чтобы приведенное неформальное утверждение стало математической теоремой требуется уточнить ряд деталей: какие именно теории рассматриваются и как непротиворечивость формализуется в их языке. Обычно для формализации утверждения о непротиворечивости используется язык формальной арифметики. А теории которые рассматриваются обычно являются расширениями некоторой базовой арифметической теории. Хотя обычно здесь рассматриваются расширения арифметики Пеано PA, как было установлено П. Пудлаком результат верен и с гораздо более слабой базовой теорией Q. Фактически, как оказывается, для техники Пудлака критично, чтобы теория могла доказать тотальность функции следования. Как было установлено Д.Е. Виллардом [11] это требование критично для второй теоремы Гёделя о неполноте. Виллард построил пример арифметической теории, которая не может доказать тотальность функции следования, но может доказать собственную непротиворечивость (т.е. стандартное арифметическое утверждение являющееся формализацией утверждения о непротиворечивости этой теории). Недостатком примеров Вилларда является то, что они достаточно искусственны, а именно Виллард строит некоторые аксиомы используя лемму о неподвижной точке.

В данной работе я построил пример теории $\mathsf{H}_{<\omega}$, которая доказывает собственную непротиворечивость и при этом достаточно естественна. В отличие от примеров Вилларда моя конструкция не является арифметической теорией, а слабой теорией множеств. При этом арифметика погружается в неё обычном образом — через арифметику на конечных ординалах. Утверждение о непротиворечивости для которого устанавливается результат является стандартной арифметизацией утверждения о непротиворечивости $\mathsf{H}_{<\omega}$.

В дополнение к предикату принадлежности $\in$ язык теории $\mathsf{H}_{<\omega}$ содержит унарную функцию $\overline{\mathsf{V}}$. Её предполагаемая интерпретация формулируется в терминах иерархии фон Неймана. Как известно, в формальной теории множеств все множества получаются из пустого или другими словами всякое множество можно получить из пустого итерацией операции множества всех подмножеств. Множество V_α из иерархии фон Неймана — это α-кратная итерация операции множества всех подмножеств, примененная к пустому множеству (здесь α пробегает ординалы). Операция $\overline{\mathsf{V}}$ это идемпотентная операция, которая переводит данное множество x в V_α для минимального α такого, что $x \subseteq V_\alpha$. Отмечу, что аналогично невозможности доказать тотальность функции следования в арифметических примерах Вилларда в теории H_ω невозможно доказать тотальность какой-либо функции на множествах которая бы переводила множества $x \subseteq V_\alpha$ в множества $y \nsubseteq V_\alpha$.

Аксиомы $\mathsf{H}_{<\omega}$:

1. $x = y \leftrightarrow \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y)$;
2. $\exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow z \in x \land \varphi(z))$;
3. $y \in \overline{\mathsf{V}}(x) \leftrightarrow (\exists z \in x)(y \subseteq \overline{\mathsf{V}}(z))$;
4. $\exists x\ \mathsf{Nat}_n(x)$, для всех $n \in \mathbb{N}$.

Здесь $\mathsf{Nat}_n(x)$ это естественные формулы выражающие то, что множество x является ординалом n.

Список литературы

[1] Lev Beklemishev and Fedor Pakhomov. Reflection algebras and conservation results for theories of iterated truth. *arXiv preprint arXiv:1908.10302*, 2019.

[2] William Craig and R.L. Vaught. Finite axiomatizability using additional predicates. *The Journal of Symbolic Logic*, 23(3):289–308, 1958.

[3] Ali Enayat and Fedor Pakhomov. Truth, disjunction, and induction. *Archive for Mathematical Logic*, 58(5-6):753–766, 2019.

[4] Kurt Gödel. Über formal unentscheidbare sätze der principia mathematica und verwandter systeme i. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 38(1):173–198, Dec 1931.

[5] S.C. Kleene. Finite axiomatizability of theories in the predicate calculus using additional predicate symbols. In *Two Papers on the Predicate Calculus*, number 10 in Memoirs of the American Mathematical Society, pages 27–68. American Mathematical Society, Providence, 1952.

[6] H. Kotlarski, S. Krajewski, and A.H. Lachlan. Construction of satisfaction classes. *Canad. Math. Bull*, 24:3, 1981.

[7] Fedor Pakhomov. A weak set theory that proves its own consistency. *arXiv preprint arXiv:1907.00877*, 2019.

[8] Fedor Pakhomov and Albert Visser. On a question of krajewski's. *Journal of Symbolic Logic*, 84(1):343–358, 2019.

[9] Alfred Tarski. Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen. *Studia Philosophica*, 1:261–405, 1936.

[10] Bartosz Wcisło and Mateusz Łełyk. Notes on bounded induction for the compositional truth predicate. *The Review of Symbolic Logic*, 10(3):455–480, 2017.

[11] Dan E. Willard. A generalization of the second incompleteness theorem and some exceptions to it. *Ann. Pure Appl. Logic*, 141(3):472–496, 2006.