ОТЧЕТ

Пржиялковского Виктора Владимировича
по конкурсу “Молодая математика России”

1. Результаты, полученные в 2019 году

Основным предметом изучения в 2019 году были гипотезы зеркальной симметрии для многообразий Фано, а также гладкие взвешенные полные пересечения Фано. Основными результатами являются следующие:

- Была сформулирована и доказана в маломерных случаях гипотеза $P = W$, усиливающая гипотезу зеркальной симметрии чисел Ходжа (совместно с Л. Кацарковым и Э. Хардером).
- Были изучены группы автоморфизмов взвешенных полных пересечений (совместно с К. Шрамовым).
- Были классифицированы гладкие взвешенные полные пересечения Фано большой коразмерности (совместно с К. Шрамовым).

Опишем эти результаты подробнее.

1.1. **Гипотеза $P = W$.** Гипотеза P=W возникла в основополагающей работе де Катальдо, Мильгорини и Хаузеля. Мы предлагаем новое прочтение этой гипотезы в случае моделей Ландау–Гинзбурга.

Важным комбинаторным инвариантом гладкого квазипроективного многообразия U является его двойственный комплекс пересечений. Выбрав для U проективную компактификацию X дивизором $D = X \setminus U$ с простыми нормальными пересечениями, определим $\Gamma(D)$ как двойственный комплекс пересечений для D. Гомотопический тип комплекса $\Gamma(D)$ зависит только от U, и этот гомотопический тип определяет пространство веса 0 определенной Делинем канонической смешанной структуры Ходжа на когомологиях с компактными носителями для U.

В зеркальной симметрии часто рассматривают пары (X, D), в которых D является антиканоническим дивизором на X с простыми нормальными пересечениями. Мы будем называть такую пару многообразием *лог-Калаби–Яу*. Для простоты обозначений мы будем называть $U = X \setminus D$ многообразием лог-Калаби–Яу, если таковым является пара (X, D).

Гросс, Кил и Хакинг по паре (X, D), где X — поверхность, а D — антиканонический цикл рациональных кривых на ней, построили двумерное многообразие $U^\vee$, которое, как ожидается, зеркально двойственно многообразию $U = X \setminus D$, как спектр некоторого кольца функций. Таким образом кольцо функций на $U^\vee$ тавтологически имеет размерность 2. С другой стороны, согласно Уру, если (X, E) — пара, состоящая из поверхности дель Пеццо X и гладкого антиканонического дивизора, то двойственным по гипотезе SYZ объектом для $U = X \setminus E$ является рациональная эллиптическая поверхность с вырезанным слоем. Следовательно, спектр ее кольца функций имеет размерность 1. Таким образом, мы видим, что если пара (X, D) состоит из рациональной поверхности X и приведенного антиканонического дивизора D с простыми нормальными пересечениями, то размерность конуса над двойственным комплексом пересечений для $U = X \setminus D$ равна размерности спектра $\mathrm{Spec}(H^0(U^\vee, \mathscr{O}_{U^\vee}))$, где $U^\vee$ зеркально двойственно к U.

Более общо, аналог подобного феномена следует ожидать в любой размерности, но в таком виде, какой представлен выше, обобщенная формулировка будет неточной. Мы объясняем это наблюдение и формулируем точные гипотезы в терминах колец когомологий и смешанных структур Ходжа на зеркально двойственных многообразиях лог-Калаби–Яу U и $U^\vee$.

Для простоты в дальнейшем все группы когомологий будут браться с комплексными коэффициентами. Если U и $U^\vee$ — зеркально двойственные многообразия лог-Калаби–Яу, то в первом приближении следует ожидать, что когомологии $H_c^*(U)$ и $H_c^*(U^\vee)$ изоморфны как векторные пространства с разной градуировкой. Согласно двойственности Пуанкаре имеем $H_c^i(U) \cong H^{\dim U - i}(U)$, так что, эквивалентно, мы можем рассматривать кольца когомологий для U и $U^\vee$. Оба пространства $H^*(U)$ и $H^*(U^\vee)$ допускают смешанные структуры Ходжа, которые состоят из убывающей фильтрацией Ходжа $F^\bullet$ и возрастающей весовой фильтрацией $W_\bullet$. Положим

$$h^{p,q}(U) = \dim \mathrm{Gr}_F^q H^{p+q}(U).$$

По аналогии с классической зеркальной симметрией для компактных многообразий Калаби–Яу мы можем ожидать, что если U и $U^\vee$ — пара гомологически зеркально двойственных многообразий лог-Калаби–Яу размерности d, то

$$h^{p,q}(U) = h^{d-p,q}(U^\vee).$$

Это равенство не учитывает весовую фильтрацию на когомологиях. Поэтому очень желательно определить, как весовая фильтрация на $H^*(U)$ отражается на фильтрации на когомологиях многообразия $U^\vee$. В качестве первого шага в этом направлении заметим, что можно использовать геометрию дивизора $D = X \setminus U$ и вычеты голоморфных форм на X с простыми полюсами вдоль компонент дивизора D для того, чтобы определить весовую фильтрацию $W_\bullet$ на $H^*(U)$. Весовая фильтрация зависит от существования проективной компактификации X для U дивизорами с простыми нормальными пересечениями, но она не зависит от конкретной компактификации, так что она является каноническим инвариантом для U. Таким образом, если зеркально двойственная фильтрация существует, естественно ожидать, что ее можно построить по информации, двойственной информации о компонентах дивизора D, но не зависящей от выбора самого дивизора.

Рассмотрим многообразие лог-Калаби–Яу U и его компактификацию X дивизором с простыми нормальными пересечениями $D = X \setminus U$. Каждая компонента D_i, $i = 1, \ldots, k$, дивизора D определяет регулярную функцию w_i на зеркально двойственном многообразии $U^\vee$. Таким образом, если существует фильтрация на $H^*(U^\vee)$, двойственная к весовой фильтрации на $H^*(U)$, то она должна определяться функциями $w_1, \ldots, w_k$.

Такой фильтрацией является *флаговая фильтрация*, которая определяется следующим образом. Обозначим через w отображение $(w_1, \ldots, w_k)\colon U^\vee \to \mathbb{C}^k$. Выберем общий флаг линейных подпространств $\Lambda_k \subset \Lambda_{k-1} \subset \cdots \subset \Lambda_0 = \mathbb{C}^k$, такой что $\dim \Lambda_i = k - i$, и положим $U_i^\vee = w^{-1}(\Lambda_i)$. Тогда для любого кольца коэффициентов R флаговая фильтрация на $H^*(U^\vee; R)$ определяется как

$$P_r H^j(U^\vee; R) = \ker(H^j(U^\vee; R) \longrightarrow H^j(U_{r+1}^\vee; R)).$$

Согласно де Катальдо и Мильгорини, если отображение w собственное, то $P_\bullet$ можно отождествить с *превратной фильтрацией Лере* отображения w, а, значит, эта фильтрация зависит только от самого отображения. Во всех известных нам случаях отображения $w_1, \dots, w_k$ порождают кольцо $\mathbb{C}[U^\vee]$, так что в этих случаях отображение $w : U^\vee \to \operatorname{im}(U^\vee)$ является отображением аффинизации для $U^\vee$, так что фильтрация $P_\bullet$ является, как минимум в этих случаях, *внутренней для* $U^\vee$ и не зависит от изначального выбора порождающих $w_1, \dots, w_k$. Таким образом мы получаем две фильтрации, построенные по данным, зеркально двойственным друг другу, и являющимися внутренними для U и $U^\vee$ соответственно.

Определение 1. Рассмотрим квазипроективное многообразие M над $\mathbb{C}$, такое что отображение аффинизации $f^{\mathrm{aff}} \colon M \to \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[M])$ собственно. Определим *превратный многочлен смешанных структур Ходжа* для квазипроективного многообразия M как

$$\mathrm{PW}_M(u,t,w,p) = \sum_{a,b,r,s} (\dim \mathrm{Gr}_F^a \mathrm{Gr}_{s+b}^W \mathrm{Gr}_r^P (H^s(M))) u^a t^s w^b p^r,$$

где $P_\bullet$ означает флаговую фильтрацию, взятую относительно f^{aff}, а W означает $\mathbb{C}$-линейное расширение весовой фильтрации.

Выдвинем следующую гипотезу.

Гипотеза 2 (Зеркальная гипотеза P=W)**.** *Рассмотрим лог-Калаби–Яу многообразие U и предположим, что двойственное ему по гипотезе гомологической зеркальной симметрии многообразие $U^\vee$ также является многообразием лог-Калаби–Яу той же размерности, что и U. Положим $d = \dim U = \dim U^\vee$. Тогда*

$$\mathrm{PW}_U(u^{-1}t^{-2}, t, p, w) u^d t^d = \mathrm{PW}_{U^\vee}(u,t,w,p).$$

Замечание 3. Максимальная глубина превратной фильтрации Лере на U равна размерности $\operatorname{Spec}(H^0(U, \mathscr{O}_U))$, так что она соответствует размерности максимальной клетки в двойственном комплексе пересечения для $U^\vee$. Таким образом, гипотеза 2 согласуется с наблюдениями, сделанными нами для случая поверхностей.

Отметим, что зеркальная гипотеза P=W тесно связана с несколькими гипотезами, уже возникавшими в литературе. Во-первых, если X является многообразием Фано, то зеркально двойственным объектом к нему является модель Ландау–Гинзбурга (Y, w). Кацарковым, Концевичем и Пантевым было показано, что если D является антиканоническим дивизором на X с простыми нормальными пересечениями, многообразие $U^\vee$ как и выше гомологически зеркально двойственно многообразию $U = X \setminus D$, функции $w_1, \dots, w_k$ на $U^\vee$ соответствуют компонентам дивизора D, то гомологически зеркально двойственным объектом к X является пара Ландау–Гинзбурга $(U^\vee, w_1 + \dots + w_k)$. Более того, существует две основные гипотезы, связывающие теорию Ходжа для X и новые инварианты ходжева типа для $(U, w_1 + \dots + w_k)$. Мы описываем, как эти гипотезы следуют из зеркальной гипотезы P=W в случае гладкого дивизора D. Ожидается, что аналогичные утверждения выполнены для случая негладкого дивизора D, однако с нашей точки зрения для их доказательства необходимо более глубоко изучить теорию Ходжа, развитую Кацарковым, Концевичем и Пантевым.

1.2. **Автоморфизмы взвешенных полных пересечений.** При изучении алгебраических многообразий бывает важно понимать структуру их групп автоморфизмов. В некоторых случаях эти группы имеют достаточно хорошие свойства. Например, напомним следующий классический результат Х. Мацумуры и П. Монского.

Теорема 4. *Пусть $X \subset \mathbb{P}^N$, $N \geq 3$, — гладкая гиперповерхность степени $d \geq 3$. Предположим, что $(N, d) \neq (3, 4)$. Тогда группа $\mathrm{Aut}(X)$ конечна.*

Следующее красивое обобщение теоремы 4 было получено О. Бенуа.

Теорема 5. *Пусть X — гладкое полное пересечение размерности не меньше 2 в $\mathbb{P}^N$, причем X не содержится в гиперплоскости. Предположим, что X не совпадает с $\mathbb{P}^N$, не является гиперповерхностью степени 2 в $\mathbb{P}^N$, и не является поверхностью типа $K3$. Тогда группа $\mathrm{Aut}(X)$ конечна.*

Цель нашего исследования — обобщить теоремы 4 и 5 на случай гладких взвешенных полных пересечений. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть X — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение размерности n. Предположим, что либо $n \geq 3$, либо $K_X \neq 0$. Тогда группа $\mathrm{Aut}(X)$ конечна, за исключением случаев, когда X изоморфно $\mathbb{P}^n$ или гиперповерхности степени 2 в $\mathbb{P}^{n+1}$.*

При небольших дополнительных предположениях утверждение теоремы 6 можно сделать более точным.

Следствие 7. *Пусть X — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение размерности n, не являющееся пересечением с линейным конусом. Предположим, что либо $n \geq 3$, либо $K_X \neq 0$. Тогда группа $\mathrm{Aut}(X)$ конечна, за исключением случаев, когда либо $X = \mathbb{P} \cong \mathbb{P}^n$, либо X является гиперповерхностью степени 2 в $\mathbb{P} \cong \mathbb{P}^{n+1}$.*

Теорема 6 в основном следует из результатов работы Фленнера. Тем не менее, некоторые случаи не покрываются этой работой, так что их приходится классифицировать и рассматривать отдельно.

Чтобы вывести следствие 7 из теоремы 6, нам нужно следующее утверждение, которое хорошо известно специалистам, но которое мы не смогли найти в известной нам литературе (и при этом, как нам кажется, оно представляет самостоятельный интерес). Будем говорить, что взвешенное полное пересечение $X \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_N)$ мультистепени $(d_1, \ldots, d_k)$ *нормализовано*, если выполнены неравенства $a_0 \leq \ldots \leq a_N$ и $d_1 \leq \ldots \leq d_k$.

Предложение 8. *Пусть $X \subset \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_N)$ и $X' \subset \mathbb{P}(a'_0, \ldots, a'_{N'})$ — нормализованные квазигладкие хорошо сформированные взвешенные полные пересечения мультистепеней $(d_1, \ldots, d_k)$ и $(d'_1, \ldots, d'_{k'})$, соответственно, причем X и X' не являются пересечениями с линейными конусами. Предположим, что $X \cong X'$ и $\dim X \geq 3$. Тогда $N = N'$, $k = k'$, $a_i = a'_i$ при всех $0 \leq i \leq N$, и $d_j = d'_j$ при всех $1 \leq j \leq k$.*

1.3. **Взвешенные полные пересечения большой коразмерности.** Рассмотрим гладкое многообразие Фано X над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{C}$ нулевой характеристики. Обозначим символом i_X индекс Фано многообразия X, то есть наибольшее целое положительное число, на которое канонический класс K_X делится в группе Пикара многообразия X. Хорошо известно, что $i_X \leq \dim X + 1$. Цель настоящего исследования— доказать следующую теорему.

Теорема 9. *Рассмотрим гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано $X \subset \mathbb{P} = \mathbb{P}(a_0, \ldots, a_N)$ размерности $n \geq 2$ и коразмерности $k = N - n$, которое не является пересечением с линейным конусом. Выполнены следующие утверждения.*

(i) *Имеет место неравенство* $k \leq n - i_X + 1$.
(ii) *Если* $k = n - i_X + 1$, *то* X *является полным пересечением* $n - i_X + 1$ *квадрик в* $\mathbb{P} = \mathbb{P}^N$.
(iii) *Предположим, что* $k = n - i_X \geq 2$ (*и, в частности,* $n \geq 3$). *Тогда* X *является полным пересечением* $n - i_X - 1$ *квадрик и кубики в* $\mathbb{P} = \mathbb{P}^N$.

Отметим, что предположение теоремы 9 о том, что X хорошо сформировано, а также предположение о том, что X не является пересечением с линейным конусом, может быть опущено, если $n \geq 3$ и X является достаточно общим.

Предложение 10. *Пусть* $X \subset \mathbb{P}$ — *квазигладкое взвешенное полное пересечение размерности не меньше* 3. *Предположим, что* X *является общим в семействе взвешенных полных пересечений соответствующей мультистепени в* $\mathbb{P}$. *Тогда существует квазигладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение* X', *изоморфное* X, *которое не является пересечением с линейным конусом.*

2. Список работ

В этом году вышли ранее принятые работы

- V. Przyjalkowski, C. Shramov, “Nef partitions for codimension 2 weighted complete intersections”, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Cl. Sci. (5), 19:3 (2019), 827–845.
- I. Cheltsov, V. Przyjalkowski, C. Shramov, “Burkhardt Quartic, Barth Sextic, and the Icosahedron”, Int. Math. Res. Not. IMRN, 2019:12 (2019), 3683–3703.
- I. Cheltsov, V. Przyjalkowski, C. Shramov, “Which quartic double solids are rational?”, J. Algebraic Geom., 28:2 (2019), 201–243.
- В. В. Пржиялковский, И. А. Чельцов, К. А. Шрамов, “Трехмерные многообразия Фано с бесконечными группами автоморфизмов”, Изв. РАН. Сер. матем., 83:4 (2019), 226–280.

Были написаны и приняты к печати работы

- Л. Кацарков, В. В. Пржиялковский, Э. Хардер, “Феномен P=W”, Матем. заметки, 2019., arXiv:1905.08706.
- К. А. Шрамов, В. В. Пржиялковский, “Автоморфизмы взвешенных полных пересечений”, Алгебра, теория чисел и алгебраическая геометрия, Сборник статей. Посвящается памяти академика Игоря Ростиславовича Шафаревича, Тр. МИАН, 307, МИАН, М., 2019, arXiv:1905.12574.

и написаны работы

- A. Kasprzyk, L. Katzarkov, V. Przyjalkowski, D. Sakovics, “Projecting Fanos in the mirror”, arXiv:1904.02194.
- K. Shramov, V. Przyjalkowski, “Fano weighted complete intersections of large codimension ”, arXiv:1906.11547.

3. Участие в научных конференциях

Я участвовал, в частности, в следующих конференциях и семинарах:

- “Mirror Symmetry and related stuff”, Санья, Китай, 5 января — 11 января, 2019.
- “Mirror Symmetry and Related Topic”, Майами, США, 28 января — 2 февраля, 2019, визит в Балтимор, 3 февраля – 6 февраля, 2019.

- Российско-корейская конференция по алгебраической геометрии, Москва, Россия, 5 апреля — 7 апреля, 2019.
- "Facets of geometry and topology", Лахор, Пакистан, 17 апреля — 19 апреля, 2019.
- "Workshop on birational geometry", Вена, Австрия, 8 мая — 10 мая, 2019.
- Визит в KIAS, Корея, 5 июня — 9 июня, 2019, "Birational geometry, Kaehler–Einstein metrics and degenerations", Шанхай, Китай, 10 июня — 14 июня, 2019.
- Пятнадцатая ежегодная Лунцевская конференция, Григоровка, Россия, 15 июля — 21 июля 2019.
- "Workshop on deformation theory", Триест, Италия, 5 августа — 10 августа, 2019.
- Международная сибирская летняя школа "Текущие достижения в геометрии", Новосибирск, Россия, 26 августа — 30 августа, 2019.
- Серия докладов на семинарах, Кардифф–Лондон–Ливерпуль–Эдинбург–Лавборо–Ноттингем, Великобритания, 02 октября — 19 октября, 2019.
- "Birational Geometry, Kaehler–Einstein Metrics and Degenerations", Поханг, Корея, 18 ноября — 22 ноября, 2019.
- Однодневная конференция, посвященная памяти В. А. Исковских, Москва, Россия, 26 декабря, 2019.

4. Работа в научных центрах и международных группах

Я являюсь заместителем руководителя Лаборатории зеркальной симметрии НИУ ВШЭ.

5. Педагогическая деятельность

Я являюсь соруководителем семинара Исковских (МИАН–МГУ). Также я являюсь организатором конференций:

- Международная конференция "Алгебра, алгебраическая геометрия и теория чисел" памяти академика Игоря Ростиславовича Шафаревича (Москва, 13 июня — 14 июня).
- Международная сибирская летняя школа "Современная геометрия" (Новосибирск, 27 августа — 1 сентября).
- Однодневная конференция, посвященная памяти В.А. Исковских (Москва, 27 декабря).

Я прочел мини-курсы "Weighted complete intersections" на "Facets of geometry and topology" (Лахор, Пакистан) и "Toric Landau–Ginzburg models" на "Workshop on deformation theory" (Триест, Италия). Также я являюсь научным руководителем Михаила Овчаренко (ВШЭ).