ОТЧЕТ

Пржиялковского Виктора Владимировича
по конкурсу “Молодая математика России”

1. Результаты, полученные в 2018 году

Основным предметом изучения в 2018 году были трехмерные многообразия Фано (как с точки зрения классической бирациональной геометрии, так и с точки зрения зеркальной симметрии), а также гладкие взвешенные полные пересечения Фано. Основными результатами являются следующие:

- Классифицированы гладкие трехмерные многообразия Фано с бесконечными группами автоморфизмов (совместно с И. Чельцовым и К. Шрамовым).
- Определена сложность Ходжа и классифицированы гладкие взвешенные полные пересечения Фано с малой сложностью Ходжа (совместно с К. Шрамовым).
- Доказаны гипотезы Кацаркова–Концевича–Пантева для гладких трехмерных многообразий Фано (совместно с И. Чельцовым).

Также был написан обзор “Торические модели Ландау–Гинзбурга”, содержащий основные результаты в направлении теории торических моделей Ландау–Гинзбурга.

Опишем эти результаты подробнее.

1.1. **Трехмерные многообразия Фано с бесконечными группами автоморфизмов.**

Одним из главных результатов В. А. Исковских является классификация гладких трехмерных многообразий Фано основной серии, то есть с группой Пикара ранга 1. Используя эту классификацию, Мори и Мукаи классифицировали трехмерные многообразия Фано с любой группой Пикара. Многообразия Фано большей размерности на сегодняшний день не поддаются классификации. Многообразия Фано играют центральную роль в алгебраической и комплексной геометрии, а трехмерные многообразия являются важнейшими примерами в теории чисел и математической физике.

Группы автоморфизмов (гладких) многообразий Фано важны с точки зрения бирациональной геометрии, в частности, с точки зрения групп бирациональных автоморфизмов рационально связных многообразий. В случае размерности один единственное гладкое многообразие Фано — это проективная прямая, чья группа автоморфизмов над алгебраически замкнутым полем $\mathbb{k}$ характеристики ноль — это $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{k})$. Группы автоморфизмов двумерных многообразий Фано (то есть поверхностей дель Пеццо) более сложны. Однако описание поверхностей дель Пеццо хорошо известно, и их группы автоморфизмов описаны Долгачевым и Исковских более десяти лет назад. Для трехмерных многообразий Фано основной серии известны несколько примеров с бесконечными группами автоморфизмов (Мукаи, Прохоров, Умемура). Недавний результат Кузнецова, Прохорова и Шрамова утверждает, что за исключением этих примеров, трехмерные многообразия Фано имеют конечную группу автоморфизмов. Заметим, что этот результат подразумевает изучение групп автоморфизмов не только общего многообразия в семействе, а всех многообразий. В частности, общее многообразие может иметь конечную группу автоморфизмов, а некоторое специальное — бесконечную.

Некоторые многообразия Фано с рангом Пикара, большим 1, с большими группами автоморфизмов известны: для торических многообразий группы найдены Батыревым, для многообразий с действием двумерного тора — Зюссом, для многообразий с действием группы $(\mathbb{k}^+)^3$ — Хваногм и Монтеро, группы $\mathrm{SL}_2(\mathbb{k})$ — Мукаи, Накано и Умемурой.

В принятой в печати статье "Трехмерные многообразия Фано с бесконечными группами автоморфизмов" совместно с Чельцовым и Шрамовым была получена классификация всех гладких трехмерных многообразий Фано, имеющих бесконечную группу автоморфизмов. Более того, для каждого из них описана связная компонента единицы их группы автоморфизмов. Для этого было использовано описание трехмерных многообразий Фано, данное Мори и Мукаи и изучено каждое из этих многообразий. Для унификации изучения многообразия были разбиты на подгруппы, такие что описание групп автоморфизмов многообразий из каждой подгруппы схожи: для многообразий, связанных с прямыми произведениями многообразий Фано меньшей размерности или конусов над ними, для раздутий $\mathbb{P}^3$, гладкой квадрики или многообразия V_5, для раздутий двойных накрытий трехмерного полного многообразия флагов или произведения проективных пространств, а также для некоторых отдельных интересных многообразий. В каждом из случаев были описаны размерности пространства параметров многообразий, имеющих данную группу автоморфизмов.

1.2. **Сложность Ходжа.** Вторым объектом изучения были числа Ходжа гладких взвешенных полных пересечений Фано. Числа Ходжа являются одним из основных инвариантов гладкого многообразия, а гладкие взвешенные полные пересечения — одним из главных примеров многомерных многообразий Фано. Кроме того, обычно многообразия, "минимальные" или близкие к "минимальным" представляют особый интерес с точки зрения рациональности и производных категорий. Так, их производные категории обычно имеют полуортогональные разложения, состоящие из "маленькой" категории и большого числа исключительных объектов. Эти маленькие категории являются категориями многообразий малой размерности, имеющих геометрическую интерпретацию.

Рассмотрим гладкое полное пересечение X размерности n во взвешенном проективном пространстве. По обобщению теоремы Лефшеца, $h^{p,q}(X) = 0$ для $p+q \neq n$, за исключением случая $p = q$, когда $h^{p,p}(X) = 1$. Таким образом, естественным показателем сложности с точки зрения чисел Ходжа является следующий.

Определение. Для гладкого проективного многообразия X размерности n положим $\mathrm{h}(X) = 0$, если $h^{q,n-q}(X) = 0$ для всех q (что возможно только для нечетных n), и

$$\mathrm{h}(X) = \max\{p_1 - p_2 \mid h^{p_i,n-p_i}(X) \neq 0, i = 1, 2\} \geq 0,$$

если существует положительное число Ходжа $h^{q,n-q}(X)$. Число $\mathrm{h}(X)$ называется *сложностью Ходжа* многообразия X.

Многообразия с $\mathrm{h}(X) = 0$ называются диагональными, многообразия с $\mathrm{h}(X) = 1$ называются имеющими тип кривой, многообразия с $\mathrm{h}(X) = m$ называются имеющими тип m-Калаби–Яу, если его "крайние" числа Ходжа равны 1. Эти определения оправданы тем, что такой тип имеют многообразия, дополнения к исключительному набору производной категории которых являются производными категориями соответствующих многообразий (и единственные нетривиальные числа Ходжа которых "средние").

В совместной работе со Шрамовым *"Hodge complexity for weighted complete intersections"*, arXiv:1801.10489, была получена точная оценка сложности Ходжа гладких взвешенных полных пересечений. А именно, была доказана следующая теорема. Пусть X — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение Фано мультистепени $(d_1, \ldots, d_k)$, $d_1 \leq \ldots \leq d_k$, в $\mathbb{P}(a_0, \ldots, a_N)$, которое не является пересечением с линейным конусом. Положим $n = \dim X = N - k$ и $i_X = \sum a_i - \sum d_j$. Заметим, что если X — нечетномерная квадрика в $\mathbb{P}^{n+1}$, то $\mathrm{h}(X) = 0$.

Теорема. *Пусть X не является нечетномерной квадрикой в $\mathbb{P}^{n+1}$. Положим $p = \left\lceil \frac{i_X}{d_k} \right\rceil$. Тогда $\mathrm{h}(X) = n - 2p$.*

Основным инструментом доказательства этого результата является восходящий к Гриффитсу подход к описанию чисел Ходжа взвешенного полного пересечения как размерностей компонент некоторого биградуированного кольца.

Кроме того, на основе этого результата была получена полная классификация диагональных полных пересечений, а также имеющих тип кривой, тип K3 и тип 3-Калаби–Яу. Примеры таких многообразий были известны раньше и активно изучались с точки зрения их производных категорий; оказалось, что других примеров среди взвешенных полных пересечений нет. Кроме того, числа Ходжа этих многообразий действительно определяются их производными категориями, как было описано выше.

1.3. **Числа Ходжа моделей Ландау–Гинзбурга.** Третьим результатом является доказательство гипотез Кацаркова–Концевича–Пантева в трехмерном случае.

Модель Ландау–Гинзбурга гладкого многообразия Фано X — это гладкое квазипроективное многообразие Y, снабженное регулярной функцией $\mathsf{w}\colon Y \to \mathbb{C}$. Гипотеза гомологической зеркальной симметрии утверждает эквивалентность производной категории когерентных пучков на X (соответственно, производной категории особенностей на (Y, w)) и категории Фукаи–Зайделя пары (Y, w) (соответственно категории Фукаи для X).

В работе *"Bogomolov–Tian–Todorov theorems for Landau–Ginzburg models"* (J. Differential Geom. **105** (2017), 55–117) Кацарков, Концевич и Пантев рассмотрели вручную компактифицированную модель Ландау–Гинзбурга, то есть коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathsf{w}"'] & Z \arrow[d, "\mathsf{f}"] \\ \mathbb{C} \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^1, \end{tikzcd}$$

такую, что Z — гладкое компактное многообразие, удовлетворяющее некоторым естественным геометрическим условиям, а f — морфизм, такой, что $\mathsf{f}^{-1}(\infty) = -K_Z$. Если такая компактификация существует, то она единственна с точностью до флопов в слоях морфизма f. Пара (Z, f) обычно называется компактифицированной моделью Ландау–Гинзбурга для X.

Кацарков, Концевич и Пантев также определили числа типа Ходжа $f^{p,q}(Y, \mathsf{w})$ для (Y, w), которые восходят к когомологиям пучков некоторых логарифмических форм. Они сформулировали следующую гипотезу.

Conjecture. *Пусть* (Y, w) — *модель Ландау–Гинзбурга гладкого многообразия Фано* X*, такая, что* $\dim(X) = \dim(Y) = d$*. Предположим, что она допускает ручную компактификацию. Тогда*

$$h^{p,q}\big(X\big) = f^{p,d-q}\big(Y, \mathsf{w}\big).$$

В работе “*Landau–Ginzburg Hodge numbers for mirrors of del Pezzo surfaces*” (совместно с В. Лунцем, Adv. Math., 329 (2018), 189–216) эта гипотеза была доказана в двумерном случае, то есть для поверхностей дель Пеццо и их моделей Ландау–Гинзбурга, предложенных Кацарковым, Орловым и Ору. В работе “*Katzarkov–Kontsevich–Pantev Conjecture for Fano threefolds*” (совместно с И. Чельцовым, arXiv:1809.09218) эти гипотезы были доказаны для трехмерных многообразий Фано и их торических моделей Ландау–Гинзбурга, построенных мной с соавторами в серии работ.

Важным инструментом доказательства является результат А. Хардера, сводящую гипотезу Кацаркова–Концевича–Пантева к геометрии моделей Ландау–Гинзбурга. А именно, рассмотрим вручную компактифицированную модель Ландау–Гинзбурга (Y, w), где $w\colon Y \to \mathbb{C}$ и $\dim Y = 3$. Обозначим через (Z, f) ее компактификацию. Пусть дивизор над бесконечностью $f^{-1}(\infty)$ комбинаторно является триангуляцией сферы. Допустим также, что $h^{i,0}(Z) = 0$ для $i > 0$. Пусть общий слой $f^{-1}(\lambda)$ является поверхностью типа K3.

Теорема (Хардер)**.** *Ромб Ходжа чисел* $f^{p,q}(Y, w)$ *имеет вид*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & 0 & & & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & 0 & & k_Y & & 0 & \\
1 & & ph-2+h^{1,2}(Z) & & ph-2+h^{2,1}(Z) & & 1 \\
 & 0 & & k_Y & & 0 & \\
 & & 0 & & 0 & & \\
 & & & 0 & & &
\end{array}$$

где

$$ph = \dim\Big(\mathrm{coker}\Big(H^2\big(Z, \mathbb{R}\big) \to H^2\big(V, \mathbb{R}\big)\Big)\Big)$$

равно корангу ограничения вторых когомологий с объемлющего пространства на общий слой V*, а число* k_Y *задается равенством*

$$k_Y = \sum_{s \in \Sigma} (\rho_s - 1),$$

в котором Σ *является множеством критических точек отображения* w*, а* ρ_s *равно числу неприводимых компонент слоя* $w^{-1}(s)$*.*

В частности, условия этой теоремы выполнены для построенных мною торических моделей Ландау–Гинзбурга трехмерных многообразий Фано. Кроме того, в этом случае $h^{2,1}(Z) = 0$.

Заметим, что бирациональные гладкие многообразия Калаби–Яу изоморфны в коразмерности 1, так что числа k_Y и ph не зависят от конкретной компактификации Калаби–Яу Y торической модели Ландау–Гинзбурга для X. Кроме того, они не зависят и от конкретной торической модели типа Минковского.

Теорема. *Гипотеза Кацаркова–Концевича–Пантева выполнена для гладких трехмерных многообразий Фано.*

Доказательство заключается в построении компактификации подходящей торической модели Ландау–Гинзбурга для каждого трехмерного многообразия Фано. А именно, если антиканонический класс $-K_X$ такого многообразия очень обилен (случаи не очень обильного антиканонического класса изучаются схожим образом отдельно), то выберем такую модель $f(x, y, z)$, что умножая ее на xyz и компактифицируя с помощью естественного вложения $\mathbb{A}[x, y, z] \hookrightarrow \mathbb{P}[x : y : z : t]$, мы получим семейство квартик $\mathcal{S}$, задающееся через

$$f_4(x, y, z, t) = \lambda xyzt, \qquad \lambda \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Можно проверить, что это всегда можно сделать.

Нам необходимо разрешить эти семейства, раздув базисное множество и следя за количеством исключительных дивизоров, лежащих в слоях семейства. Оказывается, в большинстве случаев для этого достаточно изучить особенности слоев вдоль базисного множества, не строя сами разрешения. Так, если особенность “плавающая” (то есть ее координаты меняются при варьировании элементов семейства) или изолированная дювалевская для каждого слоя, то она не дает вклад в компоненты слоев разрешения. В общем случае для каждого слоя семейства $\mathcal{S}_\lambda$ можно определить *дефект* $\mathbf{D}_P^\lambda$ особой точки P, который равен количеству исключительных дивизоров в соответствующем слое разрешения пучка, лежащих над точкой, и *дефект* $\mathbf{C}^\lambda$ базисной кривой C пучка в слое $\mathcal{S}_\lambda$. В частности, дефект изолированной дювалевской точки равен нулю.

Дефекты кривых можно посчитать в терминах кратности этих кривых в слоях. Для подсчета дефектов точек требуется несколько более сложный анализ, а именно, подсчет дефектов базисных кривых, лежащих над этой точкой.

Обозначим через $[V]$ количество неприводимых компонент многообразия V. Тогда для разрешения $f\colon Y \to \mathbb{P}^1$ пучка $\mathcal{S}_\lambda$ выполнена формула

$$[f^{-1}(\lambda)] = [\mathcal{S}_\lambda] + \sum_{i=1}^{r} \mathbf{C}_j^\lambda + \sum_{P \in \Sigma} \mathbf{D}_P^\lambda,$$

где $\{C_1, \ldots, C_r\}$ — множество базисных кривых пучка, а Σ — множество точек, над которыми лежит исключительные дивизоры. Суммируя полученные величины по всем слоям, найдем k_Y и сравним их с классически известным числом $h^{1,2}(X)$.

Далее, обозначим через M матрицу размером $r \times r$, элементы $M_{ij} \in \mathbb{Q}$ которой задаются как

$$M_{ij} = C_i \cdot C_j,$$

где через $C_i \cdot C_j$ обозначены пересечения кривых C_i и C_j на поверхности S_λ. Несложно показать, что

$$\dim\left(\operatorname{coker}\Big(H^2\big(Z, \mathbb{R}\big) \to H^2\big(V, \mathbb{R}\big)\Big)\right) - 2 = 22 - \operatorname{rk}\operatorname{Pic}\Big(\widetilde{\mathcal{S}}_\lambda / \mathcal{S}_\lambda\Big) - \operatorname{rk}(M)$$

для общего λ, где $\widetilde{\mathcal{S}}_\lambda$ — минимальное разрешение. Так как для общего λ поверхность $\widetilde{S}_\lambda$ имеет дювалевские особенности, для нахождения относительного числа Пикара минимального разрешения достаточно найти типы этих особенностей.

2. Список работ

В этом году вышли ранее принятые работы

- В. В. Пржиялковский, *О компактификациях Калаби–Яу торических моделей Ландау–Гинзбурга для полных пересечений Фано*, Матем. заметки, 103:1 (2018), 111–119.
- V. Lunts, V. Przyjalkowski, *Landau–Ginzburg Hodge numbers for mirrors of del Pezzo surfaces*, Adv. Math., 329 (2018), 189–216.

Кроме того, вышла работа

- В. В. Пржиялковский, *Торические модели Ландау–Гинзбурга*, УМН, 73:6(444) (2018), 460–555.

Была написана и принята к печати в Известиях РАН работа

- В. В. Пржиялковский, И. А. Чельцов, К. А. Шрамов, *Трехмерные многообразия Фано с бесконечными группами автоморфизмов*, arXiv:1809.09223.

и написаны работы

- V. Przyjalkowski, C. Shramov, *Hodge complexity for weighted complete intersections*, arXiv:1801.10489.
- I. Cheltsov, V. Przyjalkowski, *Katzarkov–Kontsevich–Pantev Conjecture for Fano threefolds*, arXiv:1809.09218.

3. Участие в научных конференциях

Я участвовал, в частности, в следующих конференциях и семинарах:

- "Simons collaboration in homological mirror symmetry", Майами, США, 20 января — 4 февраля.
- Международная конференция "Алгебраическая геометрия и приложения", 28 мая — 1 июня.
- "Subgroups of Cremona Groups", Обервольфах, Германия, 17-23 июня.
- "Classification, Computation, and Construction, New Methods in Geometry", Уорик, Англия, 15-17 октября.
- Kings College, Лондон, доклад, 17 октября.
- University of Nottingham, доклад, 29 марта.
- Imperial College, Лондон, доклад, 19 октября.
- University of Loughborough, доклад, 24 октября.
- University of Nottingham, доклад, 25 октября.
- University of Edinburgh, доклад, 26 октября.
- Algebraic Geometry in Mexico, Пуэрто-Эскондидо, 2-7 декабря.

4. Работа в научных центрах и международных группах

Я являюсь заместителем руководителя Лаборатории зеркальной симметрии НИУ ВШЭ.

5. Педагогическая деятельность

Я являюсь соруководителем семинара Исковских (МИАН–МГУ). Также я являюсь организатором конференций:

- Международная конференция “Алгебра, алгебраическая геометрия и теория чисел” памяти академика Игоря Ростиславовича Шафаревича (Москва, 13 июня — 14 июня).
- Международная сибирская летняя школа “Современная геометрия” (Новосибирск, 27 августа — 1 сентября).
- Однодневная конференция, посвященная памяти В.А. Исковских (Москва, 27 декабря).