ОТЧЕТ С. РЫБАКОВА ПО КОНКУРСУ "МОЛОДАЯ МАТЕМАТИКА РОССИИ".

У алгебраической кривой C над конечным полем $\mathbb{F}_q$ из q элементов есть два основных инварианта: ее род $g(C)$ и количество точек на кривой $N(C) = |C(\mathbb{F}_q)|$. Граница Хассе–Вейля устанавливает следующую связь между этими инвариантами:

$$|N(C) - q - 1| \leq 2g(C)\sqrt{q}.$$

Оказывается, что для кривых большого рода это неравенство дает не слишком хорошую оценку для числа точек. Более точно это обстоятельство описывает теорема Дринфельда–Влэдуца: для любого (разумеется, счетного) семейства кривых C_n над $\mathbb{F}_q$, у которых род стремится к бесконечности

$$\beta(C_\bullet) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{N(C_n)}{g(C_n)} \leq \sqrt{q} - 1.$$

Как только было доказано это неравенство, возник вопрос об оптимальности этой оценки, то есть существует ли семейство кривых, для которого $\beta(C_\bullet) = \sqrt{q} - 1$. Такое семейство называется *оптимальным.* Ответ положительный, если q является квадратом. При этом в качестве примеров удобно брать башни кривых. Башня кривых – это последовательность кривых C_n и конечных отображений $C_n \to C_{n-1}$, при этом род C_n стремится к бесконечности. Основные примеры оптимальных башен алгебраических кривых над конечными полями можно построить либо при помощи явных рекуррентных формул, либо как башни модулярных кривых.

Если порядок конечного поля не является квадратом, то не известно, существуют ли над ним оптимальные башни или семейства. В статье [Ry] предлагается новая конструкция, которая обобщает модулярные башни и дает надежду построить оптимальные семейства кривых без ограничений на конечное поле.

Эту конструкцию можно условно разбить на два этапа. Сперва берется семейство алгебраических многообразий над кривой C, которое является гладким над открытым подмножеством U. Тогда i-ые высшие этальные прямые образы постоянного пучка $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ — это последовательность локально постоянных пучков V_n в этальной топологии на U, то есть имеются аддитивные по слоям отображения пучков из $V_n \to V_{n-1}$.

На втором этапе уже не используется само семейство: у последовательности локально постоянных пучков V_n в этальной топологии на открытом подмножестве U можно определить послойную «проективизацию», которая будет схемой U_n, конечной над U. Если выполняются некоторые технические условия на V_n, эта схема будет геометрически неприводимой кривой. Определим C_n как гладкую проективную кривую, содержащую U_n.

Простейший пример, в котором выполняются упомянутые условия — это семейство Лежандра эллиптических кривых над полем $\mathbb{F}_{p^2}$, которому наша конструкция сопоставляет *башню Лежандра*. В статье [Ry] мы доказываем, что эта башня оптимальна.

В этом году мы изучали семейства поверхностей K3 с большой группой монодромии, которые получаются из зеркальной симметрии трехмерных многообразий Фано. Эти семейства удобны тем, что про них уже много известно. Например, во многих случаях посчитана локальная монодромия.

При построении башен, которые связаны с семействами поверхностей K3, мы используем только вторую часть конструкции, а пучки V_n строим следующим образом. Наше семейство поверхностей K3 определяется как семейство гиперповерхностей в торическом многообразии, которое при ограничении на тор можно задать многочленом Лорана с целыми коэффициентами. По этому многочлену явно строится ряд, который является формальным решением уравнения Пикара–Фукса нашего семейства над комплексными числами и определяет подфактор в локальной системе всех решений. По теореме сравнения для этальных когомологий, если редукция семейства в положительную характеристику хорошая, то этот подфактор соответствует семейству пучков V_n в этальной топологии на открытом подмножестве проективной прямой.

Важным свойством этой конструкции является возможность вычислять локальную монодромию в характеристике нуль, а затем использовать для вычисления ветвления в башне над конечным полем. Дело в том, что если редукция хорошая, то матрица оператора локальной монодромии будет такой же. Ветвление в башне вычисляется при помощи следующего результата. Возьмем точку $x \in C(\bar{k})$ из дополнения U в C, над которой слой f особый. Локальное представление монодромии позволяет вычислить ветвление над точкой x в нашей башне: имеется биекция между орбитами действия оператора локальной монодромии на проективизации этальных когомологий общего слоя с коэффициентами в $\mathbb{Z}/\ell^n\mathbb{Z}$ и точками $y \in C_n(\bar{k})$ над x, причем индекс ветвления равен длине орбиты.

Теперь надо доказать, что мы построили башню кривых, в частности, род кривой в башне будет стремиться к бесконечности. Это так если образ представления глобальной монодромии достаточно большой в следующем смысле: будем говорить, что группа G большая, если в ней есть бесконечная подгруппа H, и фактормножество G/H тоже бесконечно.

Предложение 1. *Выберем точку $a \in C(\bar{k})$, и рассмотрим слой $(V_n)_a$ пучка V_n в точке a. Пусть образ представления глобальной монодромии в $\varprojlim_n (V_n)_a$ достаточно большой. Тогда для каждого n найдется такая связная кривая $C'_n \subset C_n$, что род C'_n стремится к бесконечности, а отображение $C_n \to C_{n-1}$ индуцирует отображение $C'_n \to C'_{n-1}$.*

Используя это предложение мы доказали, что по многим семействам, которые получаются из зеркальной симметрии трехмерных многообразий Фано, можно построить башни кривых. В дальнейшем мы будем изучать поведение точек на кривых в этих башнях.

Педагогическая деятельность

Совместно с В. Вологодским, С Горчинским и Д.Осиповым мы организем семинар по арифметической геометрии в НИУ ВШЭ. Кроме того, под моим руководством пишет магистерский диплом Ю.Котельникова.

Список литературы

[Ry] Rybakov S., Families of algebraic varieties and towers of algebraic curves over finite fields. https://arxiv.org/abs/1710.05395