ОТЧЕТ С. РЫБАКОВА ПО КОНКУРСУ "МОЛОДАЯ МАТЕМАТИКА РОССИИ".

В этом году были получены новые результаты о дзета-функциях суперсингулярных поверхностей Куммера над конечными полями. Напомним, что поверхность Куммера $K(A)$, ассоциированная с абелевой поверхностью A — это разрешение особенностей фактора A по инволюции $a \mapsto -a$. Если характеристика не равна 2, то $K(A)$ будет поверхностью K3. Дзета-функции таких поверхностей были классифицированы в статье [Ry14]. Мы будем заниматься дзета-фунциями поверхностей над конечным полем, которые изоморфны $K(A)$ над алгебраическим замыканием. Такие поверхности не всегда получаются как поверхности Куммера ассоциированные с какой-то абелевой поверхностью над конечным полем, но для простоты мы тоже будем называть их поверхностями Куммера.

Мы используем следующую конструкцию. Будем предполагать, что характеристика основного поля $p > 5$. Если A — абелева поверхность с действием конечной группы $G \subset \mathrm{Aut}_0(A)$ (т.е. мы предполагаем, что G сохраняет нуль группового закона на A), то фактор A/G будет бирационален поверхности K3, если выполнены следующие условия: действие группы G симплектическое, не имеет неподвижных кривых, и все особые точки фактора рациональны. В этом случае разрешение особенностей A/G назывыается обобщенной поверхностью Куммера $K(A, G)$. По теореме Огуса, если абелева поверхность A суперсингулярна, то $K(A, G)$ изоморфна над алгебраическим замыканием обычной поверхности Куммера ассоциированной с, возможно, какой-то другой суперсингулярной абелевой поверхностью.

Возможные группы, которые могут действовать на абелевой поверхности над алгебраически замкнутым полем, и для которых выполняются три условия выше, были описаны Кацурой. Однако остался открытым вопрос, над какими конечными полями такие действия возможны. Для ответа на этот вопрос мы получаем классификацию Кацуры другим методом для суперсингулярных поверхностей над конечным полем.

Скажем, что действие группы G на абелевом многообразии A *жесткое*, если представление G в модуле Тейта $T_\ell(A)$ *не имеет неподвижных точек*, то есть для каждого $g \in G$ порядка r собственные значения g на $V_\ell(A)$ являются примитивными корнями из единицы степени r. Это условие эквивалентно тому, что при $r > 1$ у действия g на A только конечное число неподвижных точек.

В основе нашей классификации лежат следующие две теоремы. Пусть ζ_n обозначает примитивный корень из единицы степени n. Мы будем обозначать символом H_s алгебру кватернионов с центром $\mathbb{Q}$ и нетривиальными инвариантами в простом числе s и в бесконечности. Для вещественного квадратичного расширения K поля $\mathbb{Q}$ мы обозначаем через $H_\infty(K)$ алгебру кватернионов с центром K и нетривиальными инвариантами в бесконечности.

Теорема 1. *Циклическая группа G порядка n жестко действует на абелевом многообразии из класса изогении многообразия A над полем k тогда и только тогда, когда существует вложение кругового поля $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ в алгебру эндоморфизмов $\mathrm{End}_k(A) \otimes \mathbb{Q}$.*

Теорема 2. *Пусть $p > 5$, и пусть E — эллиптическая кривая над полем k. Группа G из списка Кацуры жестко действует на абелевой поверхности, которая изогенна E^2 над полем k, тогда и только тогда, когда существует вложение алгебры с делением H_G в алгебру матриц $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathrm{End}_k(E) \otimes \mathbb{Q})$ согласно следующей таблице:*

G	Dic_2	Dic_3	Dic_4	Dic_5	Dic_6
H_G	H_2	H_3	$H_\infty(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$	$H_\infty(\mathbb{Q}(\sqrt{5}))$	$H_\infty(\mathbb{Q}(\sqrt{3}))$

G	$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$	$\mathrm{CSU}_2(\mathbb{F}_3)$	$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$
H_G	H_2 *или* $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{Q}(\zeta_3))$	$H_\infty(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$	$H_\infty(\mathbb{Q}(\sqrt{5}))$

Эти результаты сводят вопросы существования абелевых поверхностей над конечным полем с действием данной группы к вопросу о вложимости полупростых алгебр над $\mathbb{Q}$, а эта задача чисто вычислительная. Получив список возможных пар (A, G) можно установить, когда такое действие будет симплектическим и как устроены особенности фактора A/G. Отсюда мы получаем список возможных дзета-функций обобщенных поверхностей Куммера $K(A, G)$.

Далее мы используем следующее замечание. Если группа G содержит нормальную подгруппу H, то на $K(A, H)$ действует G/H. Для каждого $g \in G/H$ можно определить скрученную поверхность Куммера $K(A, H)^{(g)}$, у которой действие Фробениуса на модуле

Тейта задается формулой $\phi \circ g$, где ϕ — это эндоморфизм Фробениуса поверхности $K(A, H)$. Пока остается открытым вопрос, можно ли таким образом получить все дзета-функции поверхностей Куммера.

Педагогическая деятельность

Совместно с В. Вологодским, С Горчинским и Д.Осиповым мы организуем семинар по арифметической геометрии в НИУ ВШЭ (http://www.mathnet.ru/conf932).

Кроме того, под моим руководством проходил семинар по арифметике эллиптических кривых в НМУ и на матфаке ВШЭ (http://ium.mccme.ru/f19/f19-rybakov-sem.html).

На летней математической школе Алгебра и Теория Чисел 2019 в Вороново (https://ms.hse.ru/voronovo2019) руководил семинарами по курсу Gerard van der Geer (University of Amsterdam) «Curves over finite fields».

Участие в конференциях и школах

1) Конференция AGCCT-17, Luminy, Франция, 10-14 июня 2019. Доклад: Algebraic varieties over function fields and good towers of curves. (https://agct-2019.sciencesconf.org/).

2) Конференция "Workshop on birational geometry Москва, 25 -29 марта 2019. Доклад: Zeta functions of supersingular K3 surfaces over finite fields. (http://www.mi-ras.ru/ prokhoro/conf/hse19a/index.html)

Список литературы

[Ry14] S. Rybakov. *The finite group subschemes of abelian varieties over finite fields.* Finite Fields and Their Applications. 29 (2014), 132-150. arXiv:1006.5959