ОТЧЕТ ЗА 2019 ГОД ПО КОНКУРСУ "МОЛОДАЯ МАТЕМАТИКА РОССИИ"

Соломадин Григорий Дмитриевич

Полученные результаты

За 2019 год (продление) были проведены исследования и получены новые существенные результаты по двум различным направлениям: существованию структуры торического многообразия на данном гладком проективном алгебраическом многообразии, а также эффективному получению верхней оценки на размерность тора, продолжающего данное действие тора на данном многообразии в классе GKM-действий.

Автором была ранее выдвинута гипотеза о существовании структуры торического многообразия на гиперповерхности $R_{i,j}$ $(i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ в произведении торических многообразий $BF_i \times BF_j$, которую мы называем многообразием Рэя. Данные гиперповерхности были введены Н. Рэем в 1986г. при решении задачи о представителях в классах кольца комплексных бордизмов Ω_n^U в семействе т.н. ПНР- и ПКР-многообразий (здесь и далее рассматриваются классы кольца градуировки $n \geq 4$). Вместе с ними естественно возникают гиперповерхности $BR_{i,j}$ в произведении торических многообразий $\mathbb{C}P^i \times BF_j$ $(i, j \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$, называемые нами обобщенными многообразиями Бухштабера-Рэя. Напомним, что $BR_{i,j}$ являются торическими многообразиями при $0 \leq i \leq j$ и использовались для доказательства существования в классах комплексных бордизмов квазиторических представителей в работах Бухштабера-Панова (1998г.) и Бухштабера-Панова-Рэя (2007г.). Автором были обобщены два данных результата в семействе квазиторических ПНР- и ПКР-многообразий (2017г.). В случае, если гипотеза автора верна, можно дать более простое доказательство этого результата автора.

Имеется критерий Кокса существования структуры торического многообразия на данном неособом проективном многообразии X в терминах свойства унитальной биномиальности и примарности соответствующего однородного идеала. Однако попытка его применения сталкивается с вычислительными трудностями в интересующих нас примерах. Далее, кольца когомологий данных гиперповерхностей (вычисленные ранее автором) имеют достаточно много порождающих и соотношений, чтобы сравнение с описанием кольца когомологий для торических многообразий, полученным В.И. Даниловым, также было затруднительно. Автором было введено новое необходимое условие для существования на данном гладком проективном алгебраическом многообразии X^n с фиксированным эффективным действием тора $(\mathbb{C}^\times)^k$ с изолированными неподвижными точками структуры торического многообразия. Сопряженность максимальных торов (теорема Картана) сводит этот вопрос к существованию продолжения данного $(\mathbb{C}^\times)^k$-действия до $(\mathbb{C}^\times)^n$-действия. Далее на множестве

$(\mathbb{C}^\times)^k$-орбит размерности ≤ 1 вводится структура весового гиперграфа (по аналогии с конструкцией Т. Бэрда 2009г.). На графовой части Γ данного гиперграфа корректно определена связность (понятие, введенное Гуллемином и Зарой в 2000г. для GKM-действий тора). Связность определена однозначно вдоль т.н. определенных (definite) ребер графа Γ. Обсуждаемое необходимое условие для существования продолжения действия тора во введенных выше терминах формулируется так: данная связность должна тождественно действовать на внешних ребрах графа Γ вдоль любой инвариантной петли в Γ, состоящей из определенных ребер.

Применение данного критерия (и введение торического действия явным образом в случаях, удовлетворяющих описанному выше необходимому условию) дает следующую теорему.

Теорема 1. (*i*) *$BR_{i,j}$ является торическим многообразием* $\Leftrightarrow i \leq j$ *или* $i = 1$.
(*ii*) *$R_{i,j}$ является торическим многообразием* $\Leftrightarrow \min\{i, j\} \in \{0, 1\}$.

Данная теорема опровергает упомянутую выше гипотезу автора.

Ш. Куроки ввел свободную абелеву группу аксиальных функций $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\Gamma, \alpha, \nabla)$ конечного ранга для данного GKM-действия $T^k = (S^1)^k : M^{2n}$ с GKM-данными (Γ, α, ∇). Он показал, что для любого эквивариантного GKM-продолжения T^k-действия до T^q-действия выполнено $q \leq rk\mathcal{A}$. Группа $\mathcal{A}$ выделяется как подгруппа в $\mathbb{Z}^n$ соотношениями. Таким образом, интерес к данной группе объясняется возможными оценками на размерность действий торов на данном многообразии в классе GKM-действий. Так как пока не известно явного и замкнутого описания группы $\mathcal{A}$, полезно развить соответствующие вычислительные методы.

Автором показано, что $\mathcal{A}$ изоморфна группе глобальных сечений некоторого локально постоянного пучка $\mathcal{C}$ на конечном топологическом пространстве $Top\,\Gamma$ (объединении множеств вершин и ребер графа Γ с топологией, введенной Т. Бэрдом в 2009г.). Глобальные сечения локально постоянного пучка групп на $Top\,\Gamma$ вычисляются с одной стороны как инварианты монодромии соответствующей локальной системы, а с другой как склейки сечений (согласованных на пересечениях) над простыми петлями, образующими открытое покрытие пространства $Top\,\Gamma$. Дальнейшая редукция состоит в нахождении сечений пучка $\mathcal{C}$ над инвариантными петлями в виде подгруппы в $\mathbb{Z}^n$, выделяемой системой линейных уравнений. Если аксиальная функция α 4-линейно независима, то соответствующие уравнения суть линейные уравнения от 2 переменных. Редукция для склейки сечений состоит в рассмотрении набора инвариантных петель $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$, т.ч. $K_i := \gamma_i \cap \bigcup_{j<i} \gamma_j$ является связным множеством. Мы называем такой набор петель петлевым шеллингом графа Γ (loop shelling). Для согласованности сечений s_i над петлевым шеллингом $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ графа Γ достаточно потребовать $(s_i)_{v_i} = (s_{i+1})_{v_i}$, где выбрано по одной вершине $v_i \in K_i$, $i = 1, \ldots, r-1$. Определение петлевого шеллинга мотивировано стандартным определением шеллинга полиэдрального комплекса.

Автором введена группа $\mathcal{A}'$ меточных функций (label functions). Она также интерпретируется как группа глобальных сечений локально постоянного пучка $\mathcal{C}'$ на $Top\,\Gamma$. Ее смысл состоит в том, что аксиальные функции на (Γ, α, ∇) суть 2-линейно независимые элементы группы $\mathcal{A}'$ ранга k (где k есть размерность тора из GKM-действия). Автором показан изоморфизм групп $\mathcal{A}' \simeq (\mathcal{A})^{\oplus n}$, вытекающий из изоморфизма соответствующих пучков.

Наконец, автором предложен комбинаторный подход к изучению GKM-данных (Γ, α, ∇). Любая такая тройка эквивалентна тройке (Γ, ∇, c), где c есть т.н. инвариантная k-функция на n-валентном графе Γ со связностью ∇, допускающая аксиальную функцию. Описание инвариантных k-функций на (Γ, ∇), допускающих аксиальную функцию, является тонким вопросом. Хороший класс связностей в этой задаче составляют связности, т.ч. через любые два инцидентных ребра проходит инвариантная петля в Γ (в этом случае мы называем связность ∇ 2-полной). Автором получены необходимые условия на (Γ, ∇, c) для существования аксиальной функции при 2-полной связности ∇. Эти условия сформулированы в терминах уравнений монодромии вдоль инвариантных петель в Γ, ранее возникавших при классификации неособых проективных торических поверхностей.

В настоящее время ведется поиск описания группы аксиальных функций в терминах эквивариантных когомологий GKM-многообразия (совместная работа с Ш. Куроки). Подобное описание позволит получить новые оценки на размерность продолжений данного действия тора на данном многообразии в классе GKM-действий.

Публикации

[1] “Monodromy in weight hypergraphs and its applications to torus actions”,
Подана в Mosc. Math. J., 2019 (август).
Arxiv:1904:09649.

[2] “Sheaves on graphs and the group of axial functions”,
Препринт, 2019.

[3] “The explicit geometric constructions of bordism of Milnor hypersurface $H_{1,n}$ and $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^{n-1}$”,
J. Math. Soc. Japan, предварительная публикация (на ноябрь 2019г.),
Arxiv:1807.03742.

Научные конференции и доклады на семинарах

[1] Международная конференция “Ломоносов 2019”, Москва, 8–12 апреля, 2019г.
Доклад “Инвариантные подграфы и монодромия в весовом графе гладкого проективного многообразия с эффективным действием тора сложности > 0 с изолированными неподвижными точками”.

[2] Доклад на семинаре “Глобальный анализ в современной теории дифференциальных уравнений”, Москва, 28 мая, 2019г.
Доклад “Геометрические конструкции бордизма стабильно комплексных многообразий и их приложения”.

[3] Международная конференция “Topology, Geometry, and Dynamics: Rokhlin – 100”, Санкт-Петербург, 19–23 августа, 2019г.
Доклад “Monodromy in weight graphs and its applications to torus actions”.

[4] Японско-Российский семинар по торической топологии и теории гомотопий, Москва, 26–27 августа, 2019г.
Доклад “Monodromy in weight hypergraphs and its applications to torus actions”.

[5] Доклад на научном семинаре Математического института им. С.М. Никольского РУДН по по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям под руководством профессора А.Л. Скубачевского, 3 сентября, 2019г.
Доклад "Monodromy in weight hypergraphs and its applications to torus actions".

[6] Международная конференция "One day seminar in Toric Topology", 14 ноября, 2019г.
Доклад "Explicit geometric construction of bordism of Milnor hypersurface and $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^{n-1}$".

[7] Международная конференция "Toric Topology 2019 in Okayama", 14 ноября, 2019г.
Доклад "Sheaves on GKM-graphs and the group of axial functions".

Педагогическая деятельность

[1] Чтение курса лекций "Топология–3" под рук. д.ф.-м.н., проф. Т.Е. Панова.
Москва, апрель–май 2019г. (2 лекции).

[2] Руководство спецсеминаром "Комбинаторика, алгебраическая топология и объемы многогранников" совместно с к.ф.-м.н. В.А. Красновым.
Декабрь 2019г., Москва, РУДН.