

# Отчёт по гранту «Молодая математика России» за 2020 г.

С. О. Сперанский

## Полученные результаты

---

В этом году мной были продолжены исследования по кванторным модальным логикам — см. раздел «Кванторные модальные логики» в отчёте за 2019 г. Стоит отметить, что во всех рассматриваемых мной системах:

- $\rightarrow$ ,  $\vee$  и  $\wedge$  ведут себя как в интуиционистской логике;
- $\neg$  ведёт себя как (негативный) модальный оператор невозможности.

Таким образом, мои исследования — часть общей программы по изучению кванторных интуиционистских модальных логик.

В качестве основы берётся пропозициональная логика  $\mathbf{N}$ , предложенная Дошеном (см. его обзор в [5]). Среди её расширений особое место занимают:

- i. логика  $\mathbf{N}^*$ , предложенная в [1] и тесно связанная с логическим программированием;
- ii. логика **Нуре**, предложенная в [7] и переоткрытая с новых позиций в [6].

При этом  $\mathbf{N}^*$  и **Нуре** обладают элегантной семантикой типа Раутли, где  $\neg$  интерпретируется с помощью специальной антимонотонной функции на «возможных мирах»/состояниях модели; ср. [9].<sup>1</sup> У  $\mathbf{N}$  есть лишь более сложная семантика типа Дошена.

В ходе проведения исследований выяснилось, что у  $\mathbf{N}^*$  имеются как минимум две естественные кванторные версии:

- a.  $\mathbf{QN}^*$ , которая получается из  $\mathbf{N}^*$  добавлением стандартных кванторных аксиом и правил вывода, т.е. мы добавляем «элиминацию  $\forall$ », «введение  $\exists$ » и правила Бернайса;
- b.  $\mathbf{QN}^\sharp$ , которая получается из  $\mathbf{QN}^*$  добавлением кванторных аналогов законов де Моргана и аксиомы  $\mathbf{CD}$ , отвечающей за постоянство носителей в интуиционистской логике.

Здесь были получены следующие результаты:

- A.  $\mathbf{QN}^*$  сильно полна относительно подходящей семантики типа Дошена с расширяющимися носителями, где носители могут расширяться вдоль отношений достижимости;
- B.  $\mathbf{QN}^\sharp$  сильно полна относительно подходящей семантики типа Раутли с постоянными носителями, где носители не меняются вдоль отношений достижимости.

В частности, из (B) легко следует аналогичный результат для  $\mathbf{QNуре}$ . Вместе с тем возникает естественный вопрос:

*Существует ли кванторная версия  $\mathbf{N}^*$ , которая сильно полна относительно семантики типа Раутли с расширяющимися носителями?*

---

<sup>1</sup>В случае **Нуре** это было замечено С. П. Одинцовым; см. [8].

По-видимому, ответ отрицательный. С одной стороны, кванторные законы де Моргана — это аналоги формул Барканы, отвечающих за постоянство носителей в модальной логике; при их наличии появление **CD** практически неизбежно. С другой стороны, на этих законах держится конструкция канонической модели типа Раутли.

Заметим, что в расширениях **QN**, помимо модального отрицания  $\neg$ , мы можем определить ещё одно отрицание:

$$-\Phi := \Phi \rightarrow \neg\top,$$

где  $\top$  — какая-нибудь тождественно истинная формула. Естественный интерес представляют **QN**-расширения, в которых  $-$  ведёт себя как интуиционистское отрицание. Можно убедиться, что наименьшим среди них является логика **QN'**, получающаяся из **QN\*** удалением схемы

$$\neg(\Phi \wedge \Psi) \rightarrow \neg\Phi \vee \neg\Psi.$$

Мной было показано, что **QN'** сильно полна относительно подходящей семантики типа Дошена с расширяющимися носителями, которая соответствует сериальным шкалам.

Далее, каждая логика  $L$  может обладать или не обладать теми или иными «конструктивными свойствами». Рассмотрим два наиболее известных таких свойства:

(DP) для всех формул  $\Phi$  и  $\Psi$ , если  $\Phi \vee \Psi \in L$ , то  $\Phi \in L$  или  $\Psi \in L$ ;

(EP) для любой формулы  $\Phi$ , если  $\exists x \Phi \in L$ , то найдётся терм  $t$  такой, что  $\Phi(x/t) \in L$ .

В литературе DP называют *дизъюнктивным свойством*, EP — *экзистенциальным свойством*; в пропозициональном случае EP, очевидно, теряет смысл. Известно, что:

- **N** обладает DP, как было отмечено в [3];
- **N\*** не обладает DP, как было показано в [4];
- **Нуре** не обладает DP (по аналогии с предыдущим).<sup>2</sup>

Также можно показать, что пропозициональный фрагмент **N'** логики **QN'** обладает DP. Кроме того, мной было доказано, что:

- **QN** и **QN'** обладают EP;
- Никакое субклассическое **QN\***-расширение не обладает EP.<sup>3</sup>

То же самое верно для DP, как и следует ожидать.

Наконец, поскольку модальное отрицание в **N** слабее, чем отрицание в логике Йохансона (также называемой *минимальной логикой*), можно поставить вопрос о связи подхода Дошена с работами де Йонга по субминимальным логикам — см. [2], например. В этих работах особое место занимают следующие принципы:

- E.  $(\Phi \leftrightarrow \Psi) \rightarrow (\neg\Psi \leftrightarrow \neg\Phi)$ ;
- I.  $(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\neg\Psi \rightarrow \neg\Phi)$ .

Даже не используя негативное модальное правило, нетрудно показать, что E и I равносильны над **N**. В личной переписке де Йонгом было предложено рассмотреть систему

$$\tilde{N} := N + I.$$

Мной было доказано, что  $\tilde{N}$  сильно полна относительно некоторой семантики типа Дошена, а **N\*** + I — относительно подходящей семантики типа Раутли. Кванторные версии этих результатов могут быть доказаны с помощью канонических моделей для **QN** и **QN<sup>#</sup>**.

<sup>2</sup>При этом в [6] ошибочно утверждалось наличие DP у **Нуре**.

<sup>3</sup>В частности, к субклассическим **QN\***-расширениям относятся **QN\***, **QN<sup>#</sup>** и **Нуре**.

## Опубликованные работы

---

2020 Belnap–Dunn modal logics: truth constants vs. truth values (with S. P. Odintsov).  
*Review of Symbolic Logic* 13(2), 416–435 [Published online in 2019.]

## Работы, поданные в журналы

---

2020 Negation as a modality in a quantified setting.  
Submitted. 24 p.

2020 Infinitary action logic with exponentiation (with S. L. Kuznetsov).  
Submitted. Available at arXiv. 25 p.

## Подготовленные учебные пособия

---

2020 Основные понятия теории множеств. 60 с.

## Доклады на семинарах

---

- Приглашённый онлайн-доклад  
Название: Negation as a modal operator in a quantified setting  
Advanced Research Seminar in Software Science at the University of Bamberg (organized by the Foundations of Computer Science and the Software Technologies research groups)  
Онлайн, 22 октября 2020 г.
- Приглашённый онлайн-доклад  
Название: Negation as a modality in a quantified setting  
Семинар «Теория доказательств» в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН  
Онлайн, 20 апреля 2020 г.

## Организационная деятельность

---

В этом году я занимался следующей организационной деятельностью.

- Соорганизатор (вместе с Л. Д. Беклемишевым)  
Logical Perspectives 2020 Open Lectures  
Онлайн, 17–18 ноября 2020 г.
- Сопредседатель  
Программных и Организационных комитетов  
Logical Perspectives 2020 (Conference) и  
Logical Perspectives Summer School and Workshop 2020  
Москва, Россия, 8–12 июня и 15–19 июня 2020 г.
- Член Программного комитета  
St. Petersburg Days of Logic and Computability V  
Санкт-Петербург, Россия, 13–16 мая 2020 г.

Postponed

Postponed

Кроме того, я руководил «Логическим семинаром» при Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

## Педагогическая деятельность

---

В этом году я преподавал следующие курсы на факультете математики и компьютерных наук (сокращённо ФМКН) Санкт-Петербургского государственного университета.

- Математическая логика I
  - Весна 2020: лекции + практические занятия у 3 групп
- Основы теории множеств
  - Осень 2020: лекции
- Математическая логика II
  - Осень 2020: лекции + практические занятия у 1 группы
- Введение в неклассические логики (электив) [ранее не читался]
  - Осень 2019: лекции + руководство студенческим семинаром

При этом курс «Математическая логика II» был обновлён и существенно переработан, а курс «Основы теории множеств» был оформлен в виде учебного пособия.

Кроме того, 11–12 декабря я прочитал мини-курс в международном научно-методическом центре (сокращённо МНМЦ) Санкт-петербургского государственного университета:

- Три лекции об открытии алгоритмической неразрешимости

Курс входил в программу Предновогодней школы МНМЦ.

Также я руковожу научной работой одного студента 3 курса ФМКН.

## Список литературы

---

- [1] Cabalar, P., Odintsov, S. P., and Pearce, D. (2006). Logical foundations of well-founded semantics. In Doherty, P., Mylopoulos, J., and Welty, C., editors. *Proceedings of the Tenth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR 2006)*. AAAI Press, 25–36.
- [2] Colacito, A., de Jongh, D., and Vargas, A. L. (2017). Subminimal negation. *Soft Computing* 21(1), 165–174.
- [3] Došen, K. (1986). Negation as a modal operator. *Reports on Mathematical Logic* 20, 15–27.
- [4] Drobyshevich, S. A. (2015). Double negation operator in logic  $N^*$ . *Journal of Mathematical Sciences* 205(3), 389–402.
- [5] Gabbay, D. M. and Wansing, H. (1999). *What is Negation?* Springer.
- [6] Leitgeb, H. (2019). HYPE: A system of hyperintensional logic (with an application to semantic paradoxes). *Journal of Philosophical Logic* 48(2), 305–405.
- [7] Moisil, G. C. (1942). Logique modale. *Disquisitiones Mathematicae et Physica* 2, 3–98.
- [8] Odintsov, S. P. and Wansing, H. (2020). Routley star and hyperintentionality. *Journal of Philosophical Logic*. Published online.
- [9] Routley, R. and Routley, V. (1972). The semantics of first degree entailment. *Noûs* 6(4), 335–359.