Отчет о научной и педагогической деятельности за 2019 год Тараненко Анны Александровны

1. Научные результаты

1.1. Метод регулярности для многомерных матриц

Метод регулярности для графов основан на трех результатах, известных как лемма Семереди о регулярности (Szemerédi's regularity lemma), лемма о подсчетах (counting lemma) и лемма об удалении (removal lemma). Основной вклад в развитие метода регулярности для гиперграфов сделан V. Rödl at al.

Соответствие между графами и их матрицами смежности (а также между гиперграфами и их многомерными матрицами смежности) позволяет искать аналоги лемм регулярности для многомерных матриц. Ранее A. Scott доказал лемму регулярности для двумерных матриц, леммы об удалении для матриц недавно получены в работах N. Alon и O. Ben-Eliezer.

Основной задачей данного исследования было обобщение ключевых лемм метода регулярности на случай многомерных матриц с целью получить более прозрачные и простые формулировки метода регулярности для гиперграфов или понять причины, по которым это невозможно.

Полученные по этому направлению результаты заключаются в следующем:

1. По аналогии с двумерным случаем, для многомерных матриц над конечным алфавитом введено понятие ε-регулярного блока (подматрицы) и ε-регулярного разбиения на блоки. Доказано, что для любого $\varepsilon > 0$ существуют числа N и T такие, что для любой многомерной матрицы порядка $n \geq N$ существует ε-регулярное разбиение на блоки с числом блоков, ограниченным константой T.

2. Для двумерных матриц доказано, что данного определения регулярности достаточно для получения аналога леммы о подсчетах.

3. Приведен пример, показывающий, что для матриц размерности больше двух, наличие ε-регулярного разбиения на блоки не гарантирует выполнения утверждения леммы о подсчетах.

4. Для матриц размерности больше двух введено понятие ε-регулярного паттерна, наличие которое позволяет доказать многомерную лемму о подсчетах.

1.2. Совершенные структуры

Совершенной структурой назовем тройку матриц (M, P, S) согласованных размеров, связанных соотношением $MP = PS$, где квадратная матрица M – матрица смежности графа, P – некоторая прямоугольная матрица, а квадратная матрица S есть матрица параметров совершенной структуры. Частными случаями совершенных структур являются такие объекты как подобные матрицы, собственные числа и вектора матриц, совершенные раскраски и накрытия графов.

Частные результаты по совершенным структурам рассредоточены по множеству мало связанных между собой работ различных авторов. Целью данного исследования были сбор и анализ всех основных свойств совершенных структур в одной работе и выражение их с помощью единой терминологии. А именно, сделано следующее:

1. Приведены основные алгебраические свойства совершенных структур (в том числе ряд свойств о спектрах матриц, входящих в совершенную структуру), описаны совершенные структуры, имеющие тождественную или единичную матрицу смежности.

2. Введенное обобщенное произведение графов (включающее в себя декартово, тензорное, нормальное и лексикографическое произведения) и предложена конструкция произведения совершенных структур.

3. Доказана лемма о проектировании собственных функций, обращающая конструкцию произведения.

4. Полученные свойства и конструкции совершенных структур проиллюстрированы вычислением спектров некоторых классов графов.

1.3. Совершенные 2-раскраски графов Хэмминга

(совместно с Е.А. Беспаловым, К.В. Воробьёвым, Д.С. Кротовым и А.А. Матюшевым)

Графом Хэмминга $H(n,q)$ называется граф с множеством вершин, состоящим из всех $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{Z}_q^n$ и множеством ребер, соединяющих вершины расположенные на расстоянии Хэмминга 1 друг от друга.

Совершенная 2-раскраска графа есть сюръективное отображение множества его вершин во множество из двух цветов такое, что в окрестности любой вершины цвета i содержится ровно $s_{i,j}$ вершин цвета j. Матрица $S = (s_{i,j})$ есть матрица параметров раскраски. Можно показать, что матрица параметров совершенной 2-раскраски определяется внедиагольными элементами b и c.

В данной работе рассматривается проблема существования совершенных (b,c)-раскрасок в графах $H(n,q)$ для данных b, c, n и q. Для этого доказывается несколько условий на параметры, необходимых для существования таких раскрасок, а также приводится ряд конструкций совершенных 2-раскрасок в графах Хэмминга.

Большинство новых результатов работы получено соавторами, мое участие в этом проекте заключалось в следующем:

1. Условия и конструкции совершенных (b,c)-раскрасок $H(n,q)$ скомбинированы в ряд теорем и гипотез, описывающих семейство допустимых параметров b, c, q и n.

2. При некоторых условиях на b, c и q получена оценка величины порогового значения n_0 для существования (b, c)-раскрасок в $H(n, q)$ для всех $n \geq n_0$.

3. Для $q = 2$, 3, 4 и 6 и малых значений n созданы таблицы допустимых параметров (b, c)-раскрасок $H(n, q)$.

4. Внесен определяющий вклад в создание текста статьи.

Доступен препринт данной работы, статья готовится к публикации.

1.4. Асимптотика числа трансверсалей в итерированных группах и квазигруппах

Пусть $G = (X, *)$, где $|X| = n$, – бинарная квазигруппа порядка n. d-итерированной квазигруппой назовем d-арную квазигруппу $G[d]$ такую, что

$$G[d](x_1, \ldots, x_d) = y \Leftrightarrow (\cdots (x_1 * x_2) * \cdots * x_{d-1}) * x_d = y.$$

Таблица Кэли любой d-арной квазигруппы порядка n представляет собой d-мерный латинский гиперкуб порядка n.

Трансверсалью в d-мерном латинском гиперкубе порядка n (или в d-арной квазигруппе) называется набор из n элементов гиперкуба, расположенных на максимальном расстоянии (расстоянии d) друг от друга и заполненных всеми n различными символами гиперкуба.

Данная работа продолжает исследование числа трансверсалей в итерированных квазигруппах, начатое в [1].

К настоящему моменту получены следующие результаты:

1. Доказано, что наличие трансверсалей в d-итерированных группах для четного d эквивалентно тому, что все силовские 2-подгруппы G либо тривиальные, либо не циклические.

2. Доказано, что для любой квазигруппы G порядка n существует такое d_0, что для всех $d \geq d_0$ итерированная квазигруппа $G[d]$ содержит частичную трансверсаль длины $n - 1$.

3. Один из основных результатов работы [1] усилен до следующего: если итерированная квазигруппа $G[d]$ порядка n содержит трансверсаль, то число трансверсалей в $G[d]$ равно $\frac{n!}{kn^{n-1}} n!^{d-1}(1 + o(1))$ при $d \to \infty$ для некоторого целого k, $1 \leq k \leq |G'|$, где G' – коммутант квазигруппы G.

Исследования по этой теме продолжаются, ведется подготовка статьи.

2. Дальнейшие планы

1. Завершить статью по совершенным 2-раскраскам графа Хэмминга.

2. Продолжить исследование трансверсалей, а также других типов диагоналей и их обобщений в итерированных квазигруппах и группах.

3. Исследовать диагонали и основанные на них перманенты многомерных матриц, обладающие дополнительными симметриями.

4. Развивать методы перечисления дизайнов, совершенных структур и других комбинаторных объектов с помощью перманента подходящей матрицы.

5. Продолжить изучение вопроса о числе трансверсалей в клетчатых латинских гиперкубах.

3. Публикации

3.1. Препринты и поданные в печать статьи

1. A. A. Taranenko, On the König–Hall–Egerváry theorem for multidimensional matrices and multipartite hypergraphs. Подано в *Discrete Mathematics*. Препринт доступен на ArXiv:1811.09981.

2. A. A. Taranenko, Algebraic properties of perfect structures. Подано в *Linear Algebra and its Applications*. Препринт доступен на ArXiv:1906.10430.

3. A. A. Taranenko, Regularity and counting lemmas for multidimensional matrices. Подано в *Combinatorics, Probability and Computing*. Препринт доступен на ArXiv:1909.04858.

4. E. A. Bespalov, D. S. Krotov, A. A. Matiushev, A. A. Taranenko, K. V. Vorob'ev, Perfect 2-colorings of Hamming graphs. Препринт доступен на ArXiv:1911.13151.

3.2. Принятые к публикации

1. A. A. Taranenko, Positiveness of the permanent of 4-dimensional polystochastic matrices of order 4. Принято в *Discrete Applied Mathematices*. DOI:10.1016/j.dam.2019.02.001.

4. Доклады на конференциях

1. Доклад «On a regularity method for multidimensional matrices» на *Conference on graphs, networks and their applications*. (13–18 мая, 2019. Москва).

2. Доклад «On algebraic properties of perfect structures and graph products» на *3rd Russian-Hungarian Combinatorics Workshop*. (20–25 мая, 2019. Москва).

3. Доклад «On the König–Hall theorem for multidimensional matrices» на *International Conference and PhD-Master Summer School on «Groups and Graphs, Designs and Dynamics»*. (12–25 августа, 2019. Ичан, Китай).

5. Педагогическая деятельность

1. Проведение в весеннем семестре 2018–2019 учебного года спецсеминара «Введение в дискретную математику» кафедры теоретической кибернетики ММФ НГУ.

2. Участие в судействе командных выездных соревнований школьников по решению учебно-исследовательских математических задач «Зимний математический РИНРУТ 2019» (23–26 декабря, 2019).

3. Участие в организации и судействе командных сореваний по решению исследовательских задач «Весенний Математический Марафон – 2019» (март – май, 2019) и «Осенний Математический Марафон – 2019» (октябрь – декабрь, 2019).

Список литературы

[1] A.A. Taranenko. Transversals, plexes, and multiplexes in iterated quasigroups. Electron. J. Combin. **25**(4) (2018), #P4.30.