Отчёт о научной и педагогической работе за первый год гранта "Молодая математика России 2019"

Ю. Белов

1. Результаты, полученные в 2019 году

В 2019-м году я получил несколько результатов связанных с геометрией систем из воспроизводящих ядер $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ в пространствах аналитических функций. Большинство из них связано с представлением произвольной функции f из пространства ее формальным рядом Фурье

$$f \simeq \sum_{\lambda\in\Lambda}(f, g_\lambda)k_\lambda,$$

где $\{g_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ - биортогональная система.

1.1. **Полнота биортогональной системы в пространстве $\mathcal{P}W_E$.** Удалось получить обобщение теоремы Юнга для случая, когда E - объединение двух интервалов.

Теорема 1. *Если последовательность $\Lambda \subset \mathbb{R}$ такова, что система из воспроизводящих ядер $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ в пространстве $\mathcal{P}W_E$ полна и минимальна и $2\pi D^+(\Lambda) = \limsup_{R\to\infty}(2R)^{-1}\operatorname{card}\{\Lambda\cap(-R,R)\} = |E|$, то биортогональная система $\{g_\lambda\}$ полна (т.е. коэффициенты формального ряда Фурье однозначно определяют f).*

Таким образом, аналог теоремы Юнга верен для пространства $\mathcal{P}W_E$, $E = I_1 \cup I_2$, I_1, I_2 - интервалы, при дополнительном предположении про плотность полной и минимальной системы. На настоящий момент неясно выполнено ли это предположение автоматически для любой полной и минимальной системы. Хорошо известно, что для полной и минимальной системы в классическом пространстве Пэли-Винера плотность (в любом разумном смысле) согласована с длиной интервала.

1.2. **Наследственная полнота.** Удалось получить необходимые и (отдельно) достаточные условия синтезируемости для системы из экспонент $\{e^{i\lambda t}\}_{\lambda\in\Lambda}$ на интервале. Эти условия выражены в терминах асимптотики порождающей фунцкии $G_\Lambda(z)$. В некотором классе систем эти условия оказываются одновременно необходимыми и достаточными, а именно если функция G мала вне некоторого подмножества $X \subset \mathbb{R}$ нулевой плотности и регулярна и велика на X, то для синтезируемости необходимо и достаточно расходимости интеграла $\int_X \frac{dx}{1+|x|}$. Эти результаты позволяют строить новые примеры экспоненциальных несинтезируемых систем и приближают нас к пониманию общего случая.

1.3. **Пространство Фока, плотности.** В отличии от пространства Пэли-Винера в пространстве Фока верхняя плотность полной и минимальной системы может принимать различные значения. В 2009-м году Аскензи, Любарский и Сейп показали, что при дополнительных предположениях на регулярность множества Λ верхняя плотность Λ (совпадающая с нижней из-за регулярности) находится в диапазоне $[\frac{2}{\pi}, 1]$.

При этом для любого $d \in [\frac{2}{\pi}, 1]$ есть полная и минимальная система из воспроизводящих ядер с плотностью d. Было неизвестно верен ли первый результат без предположения регулярности.

Мне (совместно с А. Боричевым и А. Кузнецовым) удалось показать, что это не так.

Теорема 2. (a) *Существует последовательность* $\Lambda \subset \mathbb{C}$ *такая, что* $D_+(\Lambda) = 1/\pi$, *а система* $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *полна и минимальна в пространстве Фока.*

(b) *Если система* $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *полна и минимальна в пространстве Фока, то* $D_+(\Lambda) \geq \dfrac{1}{3\pi}$.

Теорема 3. (a) *Для любого* $0 \leq \beta < 1$ *существует последовательность* $\Lambda \subset \mathbb{C}$ *такая, что* $D_+(\Lambda) > 1$ *и*

$$\beta = D_-(\Lambda) = D_+(\Lambda) \log \frac{e}{D_+(\Lambda)},$$

при этом система $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *полна и минимальна в пространстве Фока.*

(b) *Если система* $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *полна и минимальна в пространстве Фока и* $D_+(\Lambda) > 1$, *то*

$$D_-(\Lambda) \leq D_+(\Lambda) \log \frac{e}{D_+(\Lambda)}.$$

Таким образом, нижняя плотность $D_-(\Lambda)$ может принимать любое значение от 0 до 1 (и не может быть больше 1), а верхняя $D_+(\Lambda)$ может принимать любое значение от $\frac{1}{\pi}$ до e (и не может быть больше e или меньше $\frac{1}{3\pi}$). Вопрос о точной нижней границе для верхней плотности остался открытым.

1.4. **Пространство Фока, весовая аппроксимация.** В 2019-м году я продолжил работу над задачами весовой аппроксимации в пространстве Фока. Мне удалось получить ряд новых контрпримеров к гипотезе Ньюмана-Шапиро и получить некоторые достаточные условия при которых аппроксимация имеет место.

2. Опубликованные работы:

[1] *Nevanlinna domains with large boundaries*, Belov, Y., Borichev, A., Fedorovskiy, K., 2019, Journal of Functional Analysis 277(8), с. 2617–2643.

[2] *Krein-type theorems and ordered structure for Cauchy–de Branges spaces*, Abakumov, E., Baranov, A., Belov, Y., 2019, Journal of Functional Analysis, 277(1), с. 200–226.

[3] *Synthesizable differentiation-invariant subspaces*, Baranov, A., Belov, Y., 2019, Geometric and Functional Analysis 29(1), с. 44–71.

[4] Localization of Zeros in Cauchy–de Branges Spaces Abakumov, E., Baranov, A., Belov, Y., 2019, Trends in Mathematics с. 5–27.

3. Препринты:

[1] Y. Belov, A. Borichev, A. Kuznetsov, *The Densities of Gabor Gaussian Systems*, to appear in arxiv.

[2] A. Baranov, Y. Belov, A. Kulikov, *Spectral synthesis for exponentials*, to appear in arxiv.

4. Доклады на конференциях

1. Приглашенный доклад, "The Newman-Shapiro problem конференция "Explorations in Harmonic Analysis and other realms February 10-14, 2019, Rehovot, Israel.

2. Приглашенный доклад, “Density of complete and minimal systems of time frequency shifts of Gaussians”. Конференция, “(New Trends in) Complex and Fourier Analysis, and Operator Theory”, 23-27 September 2019, Rome, Italy .

3. Приглашенный доклад, "The Newman-Shapiro problem конференция "Spaces of Analytic Functions: Approximation, Interpolation, Sampling November 25-29, 2019, Barcelona, Spain.

5. Организационная, административная и педагогическая деятельность

В 2019-м году под моим руководством защищено три выпускных работы бакалавра (А.Куликов, А. Кузнецов, И. Лосев) и одна курсовая работа (К. Гаваза). Осенью 2019-го мой студент А. Куликов получил премию Мебиуса (первое место).

Я руковожу магистерской программой "Современная математика" в СПбГУ. Являюсь членом Организационного комитета по подготовке Международного математического конгресса математиков в 2022-м году. Организатор Зимней научной школы «Анализ, геометрия и математическая физика» 16-20 декабря 2019 года, Лаборатория им. П. Л. Чебышёва, СПбГУ.