Отчёт о научной и педагогической работе за второй год гранта “Молодая математика России 2020”

Ю. Белов

1. Результаты, полученные в 2020-м году

1.1. **Фреймы Габора.** В 2020-м году я получил несколько новых результатов в теории фреймов Габора. Пусть функция g принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R})$. Для каждой прямоугольной решетки $\alpha\mathbb{Z}\times\beta\mathbb{Z}$ рассмотрим *систему Габора* $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta>0$, связанную с этой решеткой

$$\mathcal{G}(g,\alpha,\beta) := \{e^{2\pi i\alpha m x}g(x-\beta n)\}_{m,n\in\mathbb{Z}} = \{g_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{Z}}.$$

Таким образом, система Габора это система частотно-временных сдвигов фиксированной функции. Главный вопрос теории фреймов Габора – для данной функции g описать фрейм множество $\mathfrak{F}$, т.е. множество пар параметров (α,β), для которых система Габора образует фрейм:

$$A\|f\|_2^2 \le \sum_{m,n\in\mathbb{Z}} |(f,g_{m,n})|^2 \le B\|f\|_2^2, \qquad \text{для любой функции } f\in L^2(\mathbb{R}).$$

Хорошо известно, что если плотность решетки слишком мала ($\alpha\beta>1$), то система Габора никогда не будет фреймом. Для критической плотности 1 фрейм оператор унитарно эквивалентен оператору умножения на фиксированную функцию (преобразование Зака функции g), и поэтому задача сводится к отделенности от 0 этой функции. В частности, если функция g и ее преобразование Фурье $\hat{g}$ быстро убывают, то система Габора не удовлетворяет фрейм-неравенству при $\alpha\beta=1$.

Первый полный ответ в задаче о фреймах Габора был получен К. Сейпом и Р. Волстейном. В 1992-м году они показали, что для гауссовской функции $g(x):=e^{-\pi x^2}$ фрейм множество совпадает с подграфиком гиперболы $\{(\alpha,\beta):\alpha\beta<1\}$. До 2011-го года было известно всего лишь четыре (с точностью до преобразования Фурье и растяжений) функции g, для которых был известен полный ответ. Кроме гауссиана это гиперболический секанс, односторонняя экспонента ($e^{-x}\chi_{[0,\infty)}(x)$) и ядро Пуассона $1/(1+x^2)$.

В 2011-м году было замечено, что все такие функции (с точностью до преобразования Фурье) принадлежат одному классу – положительно определенных функций, введенному Шонбергом в 1951-м году. В 2011 году К. Грохениг совместно с И. Стоклером описали фрейм-множество для любой *положительно определенной функции g конечного типа*

$$g(x) = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{x+i\omega_k}, \qquad \omega_k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}.$$

В 2017-м году К. Грохенигу и Дж. Ромеро удалось распространить этот результат на *положительно определенные функции g конечного гауссовского типа*

$$g(x) = e^{-ax^2}\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{x+i\omega_k}, \qquad \omega_k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}, a>0.$$

В прошедшем 2020-м году мне (совместно с А.И. Куликовым и Ю.И. Любарским) удалось получить необходимые и достаточные условия для того, чтобы система Габора была фреймом для произвольной рациональной функции g. Эти условия позволили выявить несколько новых классов функций, для которых фрейм множество может быть полностью описано – функции типа Герглотца и (произвольные) суммы двух ядер Коши.

Теорема 1. *Пусть*

$$g(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k}{x + i\omega_k}, \quad a_k > 0, \omega_k > 0.$$

Тогда система Габора $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ представляет собой фрейм тогда и только тогда, когда $\alpha\beta \le 1$.

Теорема 2. *Пусть*

$$g(x) = \frac{a_1}{x + i\omega_1} + \frac{a_2}{x + i\omega_2}, \quad a_1, a_2, \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Тогда если $a_1 + a_2 \neq 0$, то система Габора $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ представляет собой фрейм тогда и только тогда, когда $\alpha\beta \le 1$. Если $a_1 + a_2 = 0$, то система Габора $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ представляет собой фрейм тогда и только тогда, когда $\alpha\beta < 1$.

С другой стороны, удалось показать, что система Габора есть фрейм для иррациональных плотностей.

Теорема 3. *Пусть рациональная функция g такова, что $\hat{g}(\xi) \neq 0$, $\xi \neq 0$, и $\alpha\beta \notin \mathbb{Q}$. Тогда система Габора $\mathcal{G}(g, \alpha, \beta)$ представляет собой фрейм при $\alpha\beta < 1$.*

Также удалось построить много систем Габора, отвечающих рациональным функциям g, которые не удовлетворяют фрейм-неравенству при некоторых α, β, таких что $\alpha\beta < 1$ и $\alpha\beta \notin \mathbb{Q}$.

1.2. **Полнота биортогональной системы в пространстве $\mathcal{P}W_E$.** Удалось улучшить результат, полученный в прошлом году, и распространить теорему Юнга на случай трех интервалов. Пусть E объединение не более чем трех интервалов.

Теорема 4. *Если последовательность $\Lambda \subset \mathbb{R}$ такова, что система из воспроизводящих ядер $\{k_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ в пространстве $\mathcal{P}W_E$ полна и минимальна и $2\pi D^+(\Lambda) = \limsup_{R\to\infty}(2R)^{-1}\operatorname{card}\{\Lambda \cap (-R, R)\} = |E|$, то биортогональная система $\{g_\lambda\}$ полна (т.е. коэффициенты формального ряда Фурье однозначно определяют f).*

Для доказательства этой теоремы пришлось воспользоваться идеями из доказательства знаменитого результата Г. Козмы и Ш. Ницан о базисах из экспонент на конечном объединении интервалов и другими новыми инструментами.

Ответ на вопрос о полноте биортогональной системы в случае произвольного конечного объединения интервалов остается неизвестным.

1.3. **Почти инвариантные подпространства в пространствах типа Фока.** В 2020-м году я (совместно с А. Алеманом, А. Барановым и Х. Хеденмальмом) исследовал структуру множества инвариантных (относительно обратного сдвига $F(z) \mapsto (F(z) - F(\lambda))/(z-\lambda)$) и почти инвариантных подпространств в пространствах целых функций типа Фока $\mathcal{F}^p_W$

$$\mathcal{F}^p_W = \{F - \text{ целая } : \int_{\mathbb{C}} |F(z)|^p W(z) dm(z) < \infty\}.$$

В частности, полученные ранее теоремы были обобщены на показатели $p \in (1, \infty)$.

- Пусть $\mathcal{F}^p_W$ пространство типа Фока конечного порядка такое, что полиномы содержатся в нем и составляют всюду плотное подмножество. Тогда любое подпространство, инвариантное относительно обратного сдвига, конечномерно и совпадает со множеством полиномов степени не выше n. В частности, это означает, что оператор обратного сдвига всегда одноклеточен.
- Пусть $\mathcal{F}^p_W$, $1 < p < \infty$, пространство типа Фока с радиальным весом такое, что полиномы содержатся в нем и составляют всюду плотное подмножество. Тогда любое подпространство, инвариантное относительно обратного сдвига, конечномерно и совпадает с множеством полиномов степени не выше n.
- Пусть $\mathcal{F}^p_W$, $1 < p < \infty$, пространство типа Фока нулевого экспоненциального типа, тогда все почти инвариантные (относительно обратного сдвига) подпространства упорядочены по включению.
- Для любого $\alpha \geq 1$ пространство $\mathcal{F}^p_a = \mathcal{F}^p_{exp(-|z|^\alpha)}$ содержит нетривиальные бесконечномерные почти инвариантные подпространства.
- Пусть $\mathcal{F}^p_W$ пространство типа Фока конечного порядка n и минимального типа при порядке n. Тогда любое почти инвариантное подпространство инвариантное относительно поворота $R_{2\pi/n}$ тривиально (состоит из полиномов степени не выше n). Эти результаты были получены при помощи тонких оценок преобразования Коши на плоскости и техники, аналогичной технике де Бранжа, которую он использовал при доказательстве теоремы об упорядоченности подпространств де Бранжа. Некоторые дополнительные технические трудности возникают в негильбертовом случае $p \neq 2$.

Эти результаты вошли в препринт [2], принятый к печати в журнал International Matehmatics Researsch Notices.

1.4. **Другие результаты.** В 2020-м году была закончена работа о полных и минимальных системах из воспроизводящих ядер в классическом пространстве Фока $\mathcal{F}$. Эти результаты были опубликованы в журнале Applied and Computational Harmonic Analysis ([1]). Также в 2020-м году был подготовлен препринт о наследственной полноте систем из экспонент, [3].

В этом году я продолжил изучение задачи весовой аппроксимации в пространстве Фока и задачи о неделимых интервалах в цепочке подпространств данного пространства де Бранжа.

2. Опубликованные работы:

[1] Y. Belov, A. Borichev, A. Kuznetsov, *Upper and lower densities of Gabor Gaussian systems*, Appl. Comput. Harmon. Anal. 49 (2020), no. 2, 438–450, https://arxiv.org/abs/2003.08702.

3. Препринты:

[2] A. Aleman, A.Baranov, Y. Belov, H. Hedenmalm, *Backward shift and nearly invariant subspaces of Fock-type spaces*, https://arxiv.org/abs/2007.06107 (accepted for publication in Int. Math. Res. Notes).

[3] A. Baranov, Y. Belov, A. Kulikov, *Spectral synthesis for exponentials and logarithmic length*, https://arxiv.org/abs/2010.13201.

4. Доклады на конференциях

Доклад "Nearly invariant subspaces" на семинаре по анализу Норвежского университета науки и технологии (NTNU), 25 января 2020г, Трондхейм, Норвегия.

Доклад "Gabor frames for rational functions" на семинаре по анализу Тель-авивского университета (Tel-aviv University), 9 июня 2020г, (онлайн).

Доклад "Gabor frames for rational functions"на семинаре по анализу университета г. Болонья (University of Bologna), 19 ноября 2020г, (онлайн).

5. Организационная, административная и педагогическая деятельность

В 2019-м году под моим руководством защищена выпускная работы бакалавра (К. Гаваза), курсовая работа в бакалавриате (М. Миронов), и начата работа над тремя магистерскими выпускными работами, планирующимися к защите в 2021-м году. В лаборатории им П.Л. Чебышева я руковожу семинаром по комплескному анализу.

До 1 июля 2020 года я руководил магистерской программой "Современная математика" в СПбГУ. Являюсь членом Организационного комитета по подготовке Международного математического конгресса математиков в 2022-м году.