Отчёт по гранту ММР

Р. Гонин

11 декабря 2019 г.

1 Результаты, полученные в этом году

1.1 Твистованные представления алгебры Динга-Йохара при $q = t$, твистованные q-W-алгебры и конформные блоки

Аннотация В этой работе изучается представления квантовой тороидальной алгебры $\mathfrak{gl}_1$ при $q = t$. Строится явная конструкция модулей $\mathcal{F}_u^{(n',n)}$ с произвольным наклоном n'/n. Как векторное пространство, оно естественно отождествляется с представлениями уровня 1 аффинной $\mathfrak{gl}_n$. Также мы изучаем твистованные W-алгебры $\mathfrak{sl}_n$, действующие на этих модулях. В качестве приложения, мы доказываем соотношение на q-деформированные конформные блоки, которое было выдвинуто в качестве гипотезы при изучении q-деформации соответствия между изомонодромной деформацией и CFT.

Тороидальные алгебры и их твистованные представления Алгебра Динга-Йохара $U_{q,t}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$ – это важная алгебра, возникающая в математической физике (деформация CFT, соответствующая пятимерным суперсимметричным калибровочным теориям [AFHKS]) и алгебраической геометрии (алгебра Холла для эллиптической кривой).

В этой работе мы будем рассматривать случай $q = t$, при этом тороидальная алгебра становится универсальной обёртывающей алгебры Ли с образующими $E_{k,l}$, c', c и соотношением

$$[E_{k,l}, E_{r,s}] = (q^{(sk-lr)/2} - q^{(lr-sk)/2})E_{k+r,l+s} + \delta_{k,-r}\,\delta_{l,-s}(c'k + cl). \tag{1}$$

Мы будем обозначать эту алгебру Ли как $\mathfrak{Diff}_q$, так как имеется гомоморфизм из этой алгебры в алгебру q-разностных операторов, порождённую D, x с соотношением $Dx = qxD$; а именно $E_{k,l} \mapsto q^{kl/2}x^l D^k$.

Алгебру $\mathfrak{Diff}_q$ можно задать и по-другому, используя образующие Шевале $E(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} E_{1,k}z^{-k}$, $F(z) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} E_{-1,k}z^{-k}$, $H(z) = \sum_{k\neq 0} E_{0,k}z^{-k}$, смотри, например, [Ts14].

Имеется естественное действие группы $SL(2,\mathbb{Z})$ на $\mathfrak{Diff}_q$. Мы будем параметризовать элементы $\sigma \in SL(2,\mathbb{Z})$ следующим образом

$$\sigma = \begin{pmatrix} m' & m \\ n' & n \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Тогда σ действует следующим образом

$$\sigma(E_{k,l}) = E_{m'k+ml,\, n'k+nl}, \quad \sigma(c') = m'c' + n'c, \;\; \sigma(c) = mc' + nc. \tag{3}$$

Любое представление M можно подкрутить на автоморфизм $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$. Мы будем называть результат твистованным представлением M^σ. У алгебры Динга-Йохара имеется базисное представление $\mathcal{F}_u$ называемое фоковским. Имеется задача явного описания действия генераторов Шевалле E_n, F_n и H_n на $\mathcal{F}_u^\sigma$.

В нашей работе мы даём три различные решения этой задачи, т.е. даём три разные конструкции: фермионную, бозонную и скрученную-бозонную.

Оказывается, твистованное фоковское представление не зависит от m и m' (из формулы (2)). Поэтому мы будем обозначать это представление $\mathcal{F}_u^{(n',n)}$. Мы не будем приводить все формулы в общем виде, ограничившись примером.

Пример 1.1. *Первый нетривиальный пример $n=2$, $n'=1$. Следующие формулы задают действие $E(z)=\sum_n E_n z^{-n}$ (соответствующие трём конструкциям):*

$$E(z)=u^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{4}}\left(z^2\psi_{(0)}(q^{-1/2}z)\psi^*_{(1)}(q^{1/2}z)+z\psi_{(1)}(q^{-1/2}z)\psi^*_{(0)}(q^{1/2}z)\right), \tag{4}$$

$$E(z)=u^{\frac{1}{2}}q^{-\frac{1}{4}}\left(z^2:\exp\left(\phi_1(q^{1/2}z)-\phi_0(q^{-1/2}z)\right):+z:\exp\left(\phi_0(q^{1/2}z)-\phi_1(q^{-1/2}z)\right):\right)(-1)^{a_0[0]}, \tag{5}$$

$$E(z)=\frac{z^{\frac{1}{2}}u^{\frac{1}{2}}}{2(1-q^{\frac{1}{2}})}\left(:\exp\left(\sum_{k\neq0}\frac{q^{-k/4}-q^{k/4}}{k}a_kz^{-k/2}\right):-:\exp\left(\sum_{k\neq0}(-1)^k\frac{q^{-k/4}-q^{k/4}}{k}a_kz^{-k/2}\right):\right). \tag{6}$$

Здесь $\psi_{(0)}(z),\psi^*_{(0)}(z)$ и $\psi_{(1)}(z),\psi^*_{(1)}(z)$ – антикоммутирующие пары комплексно сопряжённых фермионов $\{\psi_a[i],\psi^*_b[j]\}=\delta_{a,b}\delta_{i+j,0}$, $\phi_b(z)=\sum_{j\neq0}a_b[j]z^{-j}/j+Q+a_b[0]\log z$ это коммутирующие бозоны, и $a_b[j]$ образующие алгебры Гейзенберга с соотношением $[a_b[j],a_{b'}[j']]=j\delta_{j+j',0}\delta_{b,b'}$. Образующие a_k в (6) удовлетворяют $[a_k,a_{k'}]=k\delta_{k+k',0}$.

В общем случае бозонная и фермионная конструкции выражают $E(z)$ через n бозонов или фермионов соответственно. Пространство этого представления – Фоковское пространство. С другой стороны, на этом пространстве действует аффинная $\mathfrak{gl}_n$, которая тоже выражается через эти бозоны или фермионы (речь идёт о конструкции Фернкеля-Каца представления на уровне 1). Наличие двух этих действий на одном пространстве – не случайное совпадение (смотри раздел 1.2).

Твистованные W-алгебры. В алгебре Динга-Йохара имеется двусторонний идеал, действующий нулём на скрученном фоковском представлении. В нашей работе мы даём явное описание это фактора, как твистованной W-алгебры. А именно, это алгебра порождённая $T_k[r]$, где $k=1,\dots n-1$, $r\in n'k/n+\mathbb{Z}$. Соотношения имеют вид

$$\sum_{l=0}^{\infty}f_{k,n}[l]\Big(T_1[r-l]T_k[s+l]-T_k[s-l]T_1[r+l]\Big)=-(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}})^2(kr-s)T_{k+1}[r+s], \tag{7}$$

$$\sum_{l=0}^{\infty}f_{n-k,n}[l]\Big(T_{n-1}[r-l]T_k[s+l]-T_k[s-l]T_{n-1}[r+l]\Big)=-(q^{\frac{1}{2}}-q^{-\frac{1}{2}})^2\big((n-k)r-s\big)T_{k-1}[r+s], \tag{8}$$

где $f_{k,n}[l]$ определены следующей формулой

$$\sum_{l=0}^{\infty}f_{k,n}[l]x^l=f_{k,n}(x)=\frac{(1-qx)^{\frac{n-k}{n}}(1-q^{-1}x)^{\frac{n-k}{n}}}{(1-x)^{\frac{2(n-k)}{n}}}. \tag{9}$$

Также мы обнаружили, что не обязательно требовать, чтобы n' и n были взаимно простыми; наши соотношения всё равно задают некоторую интересную алгебру. Пусть d – наибольший общий делитель n и n'. Тогда соответствующая скрученная алгебра действует на произведении d твистованных фоков $\mathcal{F}_{u_i}^{n'/d,n/d}$. Для $n'=0$ мы получаем стандартную W-алгебру, введённую в классической работе [FF95].

Ограничение на подрешётки Для всякой подрешётке полного ранга $\Lambda \in \mathbb{Z}^2$ индекса n у нас есть подалгебра $\mathfrak{Diff}^{\Lambda}_{q^{1/n}} \subset \mathfrak{Diff}_{q^{1/n}}$ порождённая $E_{a,b}$ при $(a,b) \in \Lambda$ и центральными элементами c, c'. Алгебра $\mathfrak{Diff}^{\Lambda}_{q^{1/n}}$ изоморфна алгебре $\mathfrak{Diff}_q$, изоморфизм зависит от выбора положительно ориентированного базиса v_1, v_2 в Λ. Обозначим этот изоморфизм ϕ_{v_1,v_2}.

Если базис v_1, v_2 выбран следующим образом $v_1 = (N,0)$, $v_2 = (R,d)$, то ограничения фоковского модуля $\mathcal{F}_u$ на $\phi_{v_1,v_2}(\mathfrak{Diff}_q)$ изоморфно следующей сумме произведений фоковских модулей

$$\mathcal{F}_{u^{1/N}}|_{\phi_{v_1,v_2}(\mathfrak{Diff}_q)} \cong \bigoplus_{l \in \mathbf{Q}_{(d)}} \mathcal{F}_{uq^{rl_0}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{uq^{r(\frac{\alpha}{n}+l_\alpha)}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{uq^{r\left(\frac{d-1}{d}+l_{d-1}\right)}} \tag{10}$$

где $r = \gcd(N,R)$.

Для $r = 1$ это разложение даёт конструкции твистованного фоковского модуля, описанные выше. Для подрешётки, натянутой на вектора $v_1 = (1,0)$ и $v_2 = (0,d)$ это разложение даёт в качестве следствия соотношение на конформные блоки.

Соотношения на конформные блоки. Следующее соотношение на q-деформированные конформные блоки для W-алгебр было высказано в качестве гипотезы [BGM] в связи с изучением q-разностных уравнений Пенлеве и более общих деавтономизаций кластерных интегрируемых систем

$$z^{\sum \frac{i^2}{n^2}} \prod_{i \neq j} \frac{1}{(q^{1+\frac{i-j}{n}};q,q)_\infty}(q^{\frac{1}{n}} z^{\frac{1}{n}}; q^{\frac{1}{n}}, q^{\frac{1}{n}}) = \sum_{(l_1,\ldots,l_n) \in \mathbf{Q}_{n-1}} \mathcal{Z}(q^{l_1}, q^{\frac{1}{n}+l_2}, \ldots, q^{\frac{n-1}{n}+l_n}; z), \tag{11}$$

где $\mathcal{Z}$ – статсумма Некрасова. Мы пользуемся формулой

$$\mathcal{Z}(u_1,\ldots,u_n;z) = z^{\frac{\sum(\log u_i)^2}{2(\log q)^2}} \prod_{i \neq j} \frac{1}{(qu_i u_j^{-1};q,q)_\infty} \langle W_u(1), W_u(z) \rangle \tag{12}$$

где $W_u(z) \in \mathcal{F}_{u_1} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{u_n}$ – вектор Уиттекера для алгебры Динга-Йохара.

Мы доказали (11) используя разложение (10). Мы рассмотрим вектор Уиттекера $W(z|1)$ для алгебры $\mathfrak{Diff}_{q^{1/n}}$. Его шаповалоское спарирвание даст левую часть (11). С другой стороны, мы показали, что его проекции на слагаемые $\mathcal{F}_{q^{l_0}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}_{q^{\frac{n-1}{n}+l_{n-1}}}$ являются Уиттекеровскими векторами для алгебры $\mathfrak{Diff}_q$. Таким образом, то же шаповалоское произведение равно правой части формулы (11).

1.2 Конструкция твистованного представления при $q \neq t$

В настоящее время я дописываю статью, в которой строится явная конструкция для твистованного фоковского представления при $q \neq t$ и $n = 2$.

Чтобы обобщить 4 на общий случай, мы заменили фермионы $\psi_{(a)}(z)$ и $\psi^*_{(b)}(z)$ на вертексные операторы $\Phi_a(z)$ и $\Psi^*_b(z)$ для алгебры $U_v(\hat{\mathfrak{gl}}_2)$, где $v = \sqrt{q/t}$. То есть формула для $E(z)$ должна иметь вид

$$E^{tw}(z) = u^{1/2}\left(z\Psi^*_-(qq_1z)\Phi_+(z) + \Psi^*_+(qq_1z)\Phi_-(z)\right). \tag{13}$$

Вертексные операторы для $U_v(\hat{\mathfrak{gl}}_2)$ определяются как сплетающие операторы $V[z,z^{-1}] \otimes F \to F$, где $V[z,z^{-1}]$ – evaluation представление, а F – фоковское представление (подробности в случае $\hat{\mathfrak{sl}}_2$ в [JM]).

2 Опубликованные и поданные в печать работы

В этом году я опубликовал на архиве работу

M. Bershtein, R. Gonin *"Twisted Representations of Algebra of q-Difference Operators, Twisted q-W Algebras and Conformal Blocks"* [`arXiv:1906.00600`]

Мы послали статью в журнал, ждём ответа рецензента.

3 Участие в конференциях и школа

- *Студенческая весенняя школа по математике и физике*, Дубна, 30 апреля – 8 мая, 2019. Доклад "Аффинный грассманиан и многообразия Накаджимы". ссылка
- *Cluster algebras*, Киото, июнь 2019. Участие с постером "Twisted Fock modules and conformal blocks". ссылка

4 Работа в научных центрах и международных группах

В этом году я работал стажёром-исследователем в Международной лаборатории теории представлений и математической физики.

5 Преподавательский опыт

В весеннем семестре 2019 года я совместно с М. Берштейном и И. Машановой организовывал семинар "Категория $\mathcal{O}$ и бимодули Зёргеля". А в этом семестре мы делаем семинар "Многочлены Макдональда и двойная аффинная алгебра Гекке". Наш семинар построен на докладах участников. Организаторы предварительно обсуждают планы докладов, составленные участниками.

Летом этого года я делал проект со школьниками в рамках выездной школы. Мы искали критическую температуру в двумерной моделе Изинга при помощи компьютерного моделирования на языке Python.

Список литературы

[AFHKS] H. Awata, B. Feigin, A. Hoshino, M. Kanai, J. Shiraishi, S. Yanagida *Notes on Ding-Iohara algebra and AGT conjecture* Proceeding of RIMS Conference 2010 "Diversity of the Theory of Integrable Systems"(ed. Masahiro Kanai) arXiv:1106.4088v3 [math-ph]

[BGM] M. Bershtein, P. Gavrylenko and A. Marshakov, *Cluster Toda chains and Nekrasov functions* [`arXiv:1804.10145`].

[FF95] B. Feigin, E. Frenkel *Quantum W-algebras and Elliptic Algebras* Comm. Math. Phys., **178 (3)**, 653–677 (1996); [`arXiv:q-alg/9508009`].

[JM] M. Jimbo, T. Miwa, *Algebraic analysis of solvable lattice models*, AMS, 1995

[Ts14] A. Tsymbaliuk *The affine Yangian of* $\mathfrak{gl}_1$ *revisited* [`arXiv:1404.5240`]