# Отчёт по гранту ММР

Р. Гонин

10 декабря 2020 г.

## 1 Результаты, полученные в этом году

### 1.1 Твистованная и нетвистованная деформированная алгебра Вирасоро при помощи вертексных операторов $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$

**Аннотация** Это работа посвящена изучение новой связи между деформированной алгеброй Вирасоро и квантовой $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$. Мы строим явную реализацию тока алгебры Вирасоро с помощью вертексных операторов интегрируемого представления квантовой $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ на уровне 1. То же самое сделано для твистованной алгебры Вирасоро.

**Деформированная алгебра Вирасоро** В этой работе мы построим реализацию двух алгебр: *деформированной алгебры Вирасоро* и *твистованной деформированной алгебры Вирасоро*. Деформированная алгебра Вирасоро активно изучается последние 25 лет. Изучены её связи с различными областями математики и математической физики, включая многочлены Макдональда, интегрируемые системы и соответствие Алдая, Гайото и Тачикавы. Твистованная алгебра Вирасоро была определена в [Shi04] при изучении решёточных моделей, но эта алгебра гораздо менее общеизвестна.

Эти алгебры зависят от двух параметров $q_1$, $q_2$. Удобно также ввести $q_3$ такой что $q_1q_2q_3 = 1$. В этой работе мы изучаем связь алгебр Вирасоро с $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$ для $q^2 = q_3$.

Чтобы определить деформированную алгебру Вирасоро нужно использовать функцию

$$\sum_{l=0}^{\infty} f_l x^l = f(x) = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \frac{(1-q_1^n)(1-q_2^n)}{1+q_3^{-n}} x^n\right). \tag{1}$$

**Определение 1.1.** Деформированная алгебра Вирасоро $\mathsf{Vir}_{q_1,q_2}$ порождена $T_n$ для $n \in \mathbb{Z}$. Определяющее соотношение

$$\sum_{l=0}^{\infty} f_l T_{n-l} T_{m+l} - \sum_{l=0}^{\infty} f_l T_{n-l} T_{m+l} = -\frac{(1-q_1)(1-q_2)}{1-q_3^{-1}} \left(q_3^{-n} - q_3^{n}\right) \delta_{n+m,0}. \tag{2}$$

Обозначим $T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} T_n z^{-n}$, $\delta(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} x^k$. Соотношение (2) эквивалентно

$$f(w/z)T(z)T(w) - f(z/w)T(w)T(z) = -\frac{(1-q_1)(1-q_2)}{1-q_3^{-1}} \left(\delta\left(\frac{w}{q_3 z}\right) - \delta\left(\frac{q_3 w}{z}\right)\right). \tag{3}$$

**Определение 1.2.** Твистованная деформированная алгебра Вирасоро $\mathsf{Vir}^{\mathrm{tw}}_{q_1,q_2}$ порождена $T_r$ для $r \in 1/2 + \mathbb{Z}$. Определяющее соотношение

$$\sum_{l=0}^{\infty} f_l T_{r-l} T_{s+l} - \sum_{l=0}^{\infty} f_l T_{s-l} T_{r+l} = -\frac{(1-q_1)(1-q_2)}{1-q_3^{-1}} \left(q_3^{-r} - q_3^{r}\right) \delta_{r+s,0}. \tag{4}$$

**Построение представления** Для построение представлений $\mathsf{Vir}_{q_1,q_2}$ и $\mathsf{Vir}^{\mathrm{tw}}_{q_1,q_2}$ мы будем использовать квантовую алгебру $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$. Более точно, мы используем интегрируемые представления $V(\Lambda_0)$ и $V(\Lambda_1)$ квантовой $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ на уровне 1, для этих представлений имеется явная реализация через алгебру Гейзенберга. Также имеются вертексные операторы

$$\Phi(z)\colon V(\Lambda_i) \to V(\Lambda_{1-i}) \otimes V_z, \qquad \Psi(z)\colon V(\Lambda_i) \to V_z \otimes V(\Lambda_{1-i}). \tag{5}$$

где $V_z$ это *evaluation*-представления алгебры $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$.

**Теорема 1.1.** *Следующие формулы задают действие* $\mathsf{Vir}^{tw}_{q_1,q_2}$ *на* $V(\Lambda_i)$

$$T(z) = c_1 \left( z\Psi^*_-(qq_1z)\Phi_+(z) + \Psi^*_+(qq_1z)\Phi_-(z) \right). \tag{6}$$

*где* $c_1$ *— некоторая константа.*

**Теорема 1.2.** *Следующие формулы задают действие* $\mathsf{Vir}_{q_1,q_2}$

$$T(z) = c_2\Big( u\Psi^*_+(qq_1z)\Phi_+(z) + u^{-1}\Psi^*_-(qq_1z)\Phi_-(z)\Big). \tag{7}$$

*где* $c_2$ *— некоторая константа.*

В теореме 1.1 мы построили бозонизацию твистованной алгебры Вирасоро $\mathsf{Vir}^{\mathrm{tw}}_{q_1,q_2}$. Ранее не было известно ни одной бозонизации $\mathsf{Vir}^{\mathrm{tw}}_{q_1,q_2}$. Бозонизация $\mathsf{Vir}_{q_1,q_2}$ была известна из [SKAO96], но наша бозонизация отличается.

**Наши методы** Главный технический инструмент этой работы — R-матричные соотношения

$$\begin{aligned} &z^{-\frac{1}{2}}\alpha_\phi(w/z)\Phi^{(1)}(z)\Phi^{(2)}(w) = \\ &\qquad w^{-\frac{1}{2}}\alpha_\phi(z/w)R^{-1}(z/w)\Phi^{(2)}(w)\Phi^{(1)}(z) + (q^{-1}v_-\otimes v_+ - q^{-2}v_+\otimes v_-)\delta(z,q^2w), \end{aligned} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} &z^{-\frac{1}{2}}\alpha_\psi(w/z)\Psi^{*,(1)}(z)\Psi^{*,(2)}(w) \\ &\qquad = w^{-\frac{1}{2}}\alpha_\psi(z/w)\Psi^{,*(2)}(w)\Psi^{*,(1)}(z)R(z/w) + (qv^*_-\otimes v^*_+ - v^*_+\otimes v^*_-)\delta(q^2z,w). \end{aligned} \tag{9}$$

где $\alpha_\phi$ и $\alpha_\psi$ — некоторые явно заданные формальные ряды, и $R(x)$ это R-матрица для $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$. Эти соотношения можно найти в [JM95], но без члена с дельта-функцией. Дело в том, что в упомянутой работе операторы зависят от числа, а нам необходимо рассмотреть их как формальные степенные ряды. Поэтому, несмотря на то, что наши формулы выглядят похоже, они имеет несколько другой смысл и нуждаются в отдельном доказательстве.

Технически, мы выписываем формулы (6) и (7), а затем проверяем определяющие соотношения $\mathsf{Vir}_{q_1,q_2}$ и $\mathsf{Vir}^{\mathrm{tw}}_{q_1,q_2}$, используя перестановочные соотношения для вертексных операторов.

**Дальнейшее развитие** Деформированная алгебра Вирасоро является частными случаем $n = 2$ алгебры $W_{q_1,q_2}(\mathfrak{sl}_n)$. Твистованная дефорированная $W$-алгебра является частными случаем $n = 2$ и $n_{tw} = 1$ алгебры $W_{q_1,q_2}(\mathfrak{sl}_n, n_{tw})$. Вообще говоря, $n_{tw}$ это параметр твиста, то есть для $n_{tw} = 0$ мы получим нетвистованную $W$-алгебру. Мы ожидаем, что можно построить бозонизацию алгебры $W_{q_1,q_2}(\mathfrak{sl}_n, n_{tw})$ через вертексные операторы $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ на уровне 1.

Также мы ожидаем, что тензорное произведение $W_{q_1,q_2}(\mathfrak{sl}_n, n_{tw})$ с алгеброй Гейзенберга $\mathsf{Heis}$ является фактором тороидальной алгебры $U_{q_1,q_2,q_3}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$; для нетвистованного случая это утверждение известно [FHS+10], [FFJ+11], [Neg18]. Следовательно, представление $W_{q_1,q_2}(\mathfrak{sl}_n, n_{tw})\otimes\mathsf{Heis}$ становится представлением $U_{q_1,q_2,q_3}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$ автоматически. Мы ожидаем, что для $\gcd(n, n_{tw}) = 1$, упомянутое выше бозонизированное представление $W_{q_1,q_2}(\mathfrak{sl}_n, n_{tw})$ даст твистованные фоковский модуль $U_{q_1,q_2,q_3}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$ с наклоном $n_{tw}/n$. Для $q_3 = 1$ всё это проделано в [BG20]. Ясно, что имеется действие $W_{q_1,q_2}(\mathfrak{sl}_n, n_{tw}) \otimes \mathsf{Heis}$ на интегрируемом представлении $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_n) = U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) \otimes \mathsf{Heis}$, если такое действие известно без множители $\mathsf{Heis}$.

Одна из мотиваций этого исследования приходит из [GN17]. В этой работе была выдвинута гипотеза, что алгебра $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ действует на твистованном Фоке тороидальной алгебры $U_{q_1,q_2,q_3}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$ с наклоном $n'/n$. Как это объяснено выше, мы ожидаем, что $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$ действует на твистованном фоковском модуле $U_{q_1,q_2,q_3}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$. Таким образом, мы надеемся, что оба действия существуют и совпадают.

### 1.2 Финитизация

В настоящее время я работаю над статьёй, в которой строится явная конструкция финитизированного твистованного фоковского представления $U_{q_1,q_2,q_3}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$. Действие Двойной Аффинной алгебры Гекке было построено на тензорном произведении evaluation-представлений $U_q(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$. Также было доказано, что это представление изоморфно твистованному представлению Чередника. Я ожидаю, что предельным переходом эта явная конструкция даст явную реализацию твистованного фоковского модуля через вертексные операторы.

## 2 Опубликованные и поданные в печать работы

**Опубликованные** Опубликована работа, упомянутая в прошлом году в качестве препринта

Bershtein, Mikhail; Gonin, Roman. Twisted representations of algebra of $q$-difference operators, twisted $q$-$W$ algebras and conformal blocks. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* 16 (2020), Paper No. 077, 55 pp. [arXiv:1906:00600].

**Поданные в печать** Подана в печать работа, результаты которой описано в разделе 1.1

M.A. Bershtein, R. R. Gonin. Twisted and Non-Twisted Deformed Virasoro Algebra via Vertex Operators of $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$. [arXiv:2003.12472].

## 3 Участие в конференциях и школа

- Доклад на семинаре MIT "Geometric representation theory"(Кембридж, США, 13.05.2020), доклад "Twisted Fock module of quantum toroidal $gl_1$"
- Доклад на семинаре Колумбийского университета "Informal Mathematical Physics Seminar"(Нью-Йорк, США, 29.06.2020), доклад "Twisted Fock module of quantum toroidal $gl_1$"

## 4 Работа в научных центрах и международных группах

Я являюсь ассоциированным членом Международной лаборатории теории представлений и математической физики.

## 5 Преподавательский опыт

В осеннем семестре я веду семинары и проверяю домашние работы на курсе 'Geometric Foundation of Analysis' в рамках программы 'Math in Moscow'.

В весеннем семестре 2020 года я совместно с М. Берштейном и А. Хорошкиным организовывал семинар "Многочлены Макдональда и двойная аффинная алгебра Гекке". А в этом семестре мы делаем семинар "W-алгебры и связанные сюжеты". Наш семинар построен на докладах участников. Организаторы предварительно обсуждают планы докладов, составленные участниками.

## Список литературы


[BG20] Mikhail Bershtein and Roman Gonin. Twisted representations of algebra of $q$-difference operators, twisted $q$-$W$ algebras and conformal blocks. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.*, 16:Paper No. 077, 55, 2020.

[FFJ$^+$11] B. Feigin, E. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, and E. Mukhin. Quantum continuous $\mathfrak{gl}_\infty$: tensor products of Fock modules and $\mathcal{W}_n$-characters. *Kyoto J. Math.*, 51(2):365–392, 2011. [`arXiv:1002.3113`].

[FHS$^+$10] B. Feigin, A. Hoshino, J. Shibahara, J. Shiraishi, and S. Yanagida. Kernel function and quantum algebra. *RIMS Kokyuroku*, 1689:133–152, 2010. [`arXiv:1002.2485`].

[GN17] E. Gorsky and A. Neguţ. Infinitesimal change of stable basis. *Selecta Math. (N.S.)*, 23(3):1909–1930, 2017. [`arXiv:1510.07964`].

[JM95] Michio Jimbo and Tetsuji Miwa. *Algebraic analysis of solvable lattice models*, volume 85 of *CBMS Regional Conference Series in Mathematics*. Published for the Conference Board of the Mathematical Sciences, Washington, DC; by the American Mathematical Society, Providence, RI, 1995.

[Neg18] A. Neguţ. The $q$-AGT-W relations via shuffle algebras. *Comm. Math. Phys.*, 358(1):101–170, 2018. [`arXiv:1608.08613`].

[Shi04] J. Shiraishi. Free field constructions for the elliptic algebra $\mathcal{A}_{q,p}(\widehat{\mathrm{sl}}_2)$ and Baxter's eight-vertex model. *Internat. J. Modern Phys. A*, 19(May, suppl.):363–380, 2004. [`arXiv:0302097`].

[SKAO96] J. Shiraishi, H. Kubo, H. Awata, and S. Odake. A quantum deformation of the Virasoro algebra and the Macdonald symmetric functions. *Lett. Math. Phys.*, 38(1):33–51, 1996. [`arXiv:9507034`].