# Отчёт по гранту ММР

Р. Гонин

16 декабря 2021 г.

## 1 Результаты, полученные в этом году

### 1.1 Твистованное представление Чередника алгебры ДАХА

Двойная аффинная алгебра Гекке (ДАХА) имеет представление Чередника. Это представление было рассмотрено в работе [C92] в связи с изучением полиномов Макдональда. Я изучал алгебру ДАХА для $\mathfrak{gl}_N$, будем обозначать её $\mathcal{H}_N$. ДАХА зависит от параметров $q$ и $v$, чтобы подчеркнуть зависимость я буду использовать обозначение $\mathcal{H}_N(q, v)$.

На этой алгебре автоморфизмами действует группа $\widetilde{SL}(2, \mathbb{Z})$ (центральное расширение $SL(2, \mathbb{Z})$ при помощи $\mathbb{Z}$). Поэтому мы можем рассмотреть представление Чередника, твистованное с помощью элемента $\sigma \in \widetilde{SL}(2, \mathbb{Z})$; то есть взять тоже векторное пространство с новым действием, полученным из старого с помощью автоморфизма.

Ниже мы будем считать, что при факторизации по центру

$$\sigma \mapsto \begin{pmatrix} m' & m \\ n' & n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Мы построили это представление явно следующим способом. Согласно квантовой аффинной двойственности Шура-Вейля [GRV92], аффинная алгебра Гекке $H_N^{\mathrm{aff}}$ является централизатором квантовой аффинной $\mathfrak{gl}_n$ при действии на тензорном произведении *evaluation*-представлений

$$U_v(\widehat{\mathfrak{gl}}_n) \curvearrowright \mathbb{C}^n[Y_1^{\pm 1}] \otimes \cdots \otimes \mathbb{C}^n[Y_N^{\pm 1}] \curvearrowleft H_N^{\mathrm{aff}}, \tag{2}$$

здесь мы используем то же $n$, что и в формуле (1). Мы имеем $H_N^{\mathrm{aff}} \subset \mathcal{H}_N$. Более того, $\mathcal{H}_N$ порождено элементами $H_N^{\mathrm{aff}}$ и $\pi^{\pm 1}$. Действие $\pi$ мы задаём явной формулой. Полученное представление изоморфно представлению Чередника, твистованному на $\sigma$.

В описанном результате представляет интерес не только явная конструкция сама по себе, но и появление $U_v(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$. Мы обсудим этот феномен ниже.

### 1.2 Конструкция твистованного фоковского модуля

Квантовая тороидальная алгебра — эта важная алгебра, возникающая в различных областях математики и математической физики [SV11, N15, N18]. Эта алгебра зависит от двух параметров $q_1$, $q_2$ и обозначается $U_{q_1,q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$. У этой алгебры имеется фоковское представление $\mathcal{F}_u$ [FHHSY09, FT11]. На алгебре $U_{q_1,q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$ также действует группа $\widetilde{SL}(2, \mathbb{Z})$, поэтому мы можем рассмотреть твистованное представление Фока $\mathcal{F}_u^\sigma$. Алгебра $U_{q_1,q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$ имеет образующие Шевалле, которые мы обозначаем $P_{1,b}, P_{-1,b}$ для $b \in \mathbb{Z}$ и $P_{0,k}$ для $k \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$. Один из способов задавать представление это построить действие образующих Шевалле.

Мы построили явно твистованное фоковское представление. Как и в предыдущем разделе, ответ выражается через квантовую аффинную алгебру и её представления. Пусть $F_0, \ldots, F_{n-1}$

интегрируемые представления уровня 1 алгебры $U_v(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$. Имеются вертексные операторы, определённые как сплетающие операторы

$$\Phi\colon \mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}]\otimes F_i \to F_{i+1}, \qquad \Phi^*\colon F_{i+1}\to \mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}]\otimes F_i, \tag{3}$$

$$\Psi\colon F_i\otimes \mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}] \to F_{i+1}, \qquad \Psi^*\colon F_{i+1}\to F_i\otimes \mathbb{C}^n[Y^{\pm 1}]. \tag{4}$$

Компоненты вертексных операторов обозначаются $\Phi_k, \Phi_k^*, \Psi_k, \Psi_k^*$ соответственно.

**Теорема 1.** *Следующие формулы задают действие $U_{q_1,q_2}(\ddot{\mathfrak{gl}}_1)$ на $F_i$*

$$P_{0,k}\mapsto \#B_k, \quad P_{1,b}\mapsto \sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}} \#\Psi_{k+n'+nb}\Phi^*_{-k}, \quad P_{-1,b}\mapsto \sum\nolimits_{k\in\mathbb{Z}} \#\Phi_{k-n'+nb}\Psi^*_{-k}, \tag{5}$$

*полученное представление изоморфно $\mathcal{F}_u^\sigma$. Здесь $q_2=v^{-2}$.*

Доказательство теоремы основано на результатах Раздела 1.1 и полубесконечной конструкции. Твистованный фоковский модуль можно получить пределом $N\to\infty$ сферической части твистованного представления Чередника.

### 1.3 Гипотеза Горского-Негуца

Стабильные оболочки — это важный глубокий объект современной геометрической теории представлений [O17]. Стабильными оболочками называется некоторый базис в эквивариантной K-теории симплектических разрешений. Для схемы Гильберта этот базис изучался в работе [GN17]. В этом случае мы имеем базис $\{s_\lambda^\tau\}$, где $\tau\in\mathbb{R}\backslash\{\text{walls}\}$. Если мы изучаем схему Гильберта $k$ точек, то $\{\text{walls}\}$ это рациональные числа со знаменателем не превышающим $k$. При этом базис $\{s_\lambda^\tau\}$ не меняется в альковах между стенками. При переходе через стенку происходит замена базиса.

Горский и Негуц изучали эти замены базиса численно и выдвинули гипотезу, что есть отождествление K-теории с $F_i$ такое, что базисы с двух сторон от стенки переходят в стандартный и костандартный базисы (напомним, что это интегрируемое представление уровня 1 квантовой аффинной $\mathfrak{gl}_n$). С другой стороны, в работе [FT11] было показано, что эквивариантная K-теория схемы Гильберта имеет геометрическое действие $U_{q_1,q_2}(\mathfrak{gl}_1)$, а полученное представление изоморфно $\mathcal{F}_u$. Таким образом, мы получаем некоторое интересное отождествления $F_i$ и $\mathcal{F}_u$ как векторных пространств.

Гипотеза Горского-Негуца была доказана в работе [KS]. Мы выдвигаем некоторое уточнение этой гипотезы. А именно, что отождествление $F_i$ и $\mathcal{F}_u$, описанное выше, совпадает с отождествлением, получаемым из Теоремы 1.

В случае схемы Гильберта, K-теория отождествляется с симметрическими функциями. При этом у стабильных оболочек есть чисто комбинаторное описание. Мы проверили два из трёх условий, определяющих стабильные оболочки.

## 2 Итоги трех лет

Построение твистованного фоковского модуля было заявлено в качестве основной цели и было достигнуто полностью. В первый год проекта был рассмотрен частный случай шуровской специализации $q_2=1$. Во второй год был рассмотрен случай произвольных $q_1$, $q_2$, но $n=2$. Благодаря рассмотрению этих частных случаев мы имели представление о том, в каком виде может выглядеть ответ в общем случае.

Для шуровской специализации удалось сделать больше, чем в общем случае. Мы построили некоторый более общий класс представлений. Мы доказали связь с твистованным $W$-алгебрами и применили обобщение нашей конструкции для доказательства некоторого тождества на статсуммы Некрасова. Также хочется отметить, что во второй год мы работали не буквально с твистованным представлением, а с твистованной алгеброй Вирасоро. Эквивалентность этих подходов пока не доказана вне случая шуровской специализации.

Ещё одной целью проекта было заявлено доказательство гипотезы Горского-Негуца. Как объяснялось выше, наше доказательство гипотезы ещё не готово, но мы существенно продвинулись.

## 3 Опубликованные и поданные в печать работы

Результаты первых двух лет опубликованы

- Bershtein, Mikhail; Gonin, Roman. Twisted representations of algebra of $q$-difference operators, twisted $q$-$W$ algebras and conformal blocks. *SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl.* 16 (2020), Paper No. 077, 55 pp.
- Bershtein, Mikhail; Gonin, Roman. Twisted and non-twisted deformed Virasoro algebras via vertex operators of $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_2)$. *Lett. Math. Phys.* 111 (2021), no. 1, Paper No. 22, 22 pp.

Результаты последнего года изложены в препринте

- Bershtein, Mikhail; Gonin, Roman. Twisted Fock module of toroidal algebra via DAHA and vertex operators. [arXiv: 2109.12598]

## 4 Участие в конференциях и школах

Результаты докладывались на семинаре центра перспективных исследований в Сколтехе (Москва, 27.09.2021). Доклад "Semi-infinite construction of twisted Fock module for quantum toroidal $gl_1$"

Также я участвовал онлайн и без доклада в школе "Enumerative Geometry, Physics and Representation Theory", организованной IHES, Франция 5-16 июля.

## 5 Педагогическую деятельность

- Семинарист курса "Дифференциальные уравнения", НИУ ВШЭ, физфак
- Семинарист курса "Advanced linear algebra", Math in Moscow
- Преподаватель reading course "Basic algebra", Math in Moscow
- Организатор семинара "W-алгебры и связанные сюжеты", (совместно с М. Берштейном и В. Крыловым)
- Организатор семинара "Модель Годена" (совместно с М. Берштейном и В. Крыловым)

## Список литературы


[C92] Ivan Cherednik. *Double affine Hecke algebras, Knizhnik-Zamolodchikov equations, and Macdonald's operators.* Internat. Math. Res. Notices, (9):171–180, 1992.

[FHHSY09] B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi, and S. Yanagida. *A commutative algebra on degenerate* $\mathbb{CP}^1$ *and Macdonald polynomials.* J. Math. Phys., 50(9):095215, 42, 2009.

[FHSSY10] B. Feigin, A. Hoshino, J. Shibahara, J. Shiraishi, and S. Yanagida. *Kernel function andquantum algebra.* RIMS Kokyuroku, 1689:133–152, 2010.

[FT11] Feigin B., Tsymbaliuk A., *Heisenberg action in the equivariant* $K-$*theory of Hilbert schemes via Shuffle Algebra*, Kyoto J. Math. 51 (2011), no. 4

[GN17] Gorsky E., Negut A., *Infinitesimal change of stable basis*, Selecta Math., July 2017, Volume 23, Issue 3, pp 1909–1930

[GRV92] Victor Ginzburg, Nicolai Reshetikhin, and Éric Vasserot. *Quantum groups and flag varieties.* In Mathematical aspects of conformal and topological field theories and quantum groups

[N15] A. Negut. *Moduli of flags of sheaves and their K-theory.* Algebr. Geom., 2(1):19–43, 2015. 170, 2018.

[N18] A. Negut. *The q-AGT-W relations via shuffle algebras.* Comm. Math. Phys., 358(1):101–170, 2018.

[O17] Andrei Okounkov. *Lectures on K-theoretic computations in enumerative geometry.* In Geometry of moduli spaces and representation theory, volume 24 of IAS/Park City Math. Ser., pages 251–380. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017.

[SV11] O. Schiffmann and E. Vasserot. *The elliptic Hall algebra, Cherednik Hecke algebras and Macdonald polynomials.* Compos. Math., 147(1):188–234, 2011.