Конкурс «Молодая математика России»
отчет Д.М. Ицыксона за 2019 год

1 Публикации

Работы опубликованные в материалах рецензируемых конференций:

[9] Ludmila Glinskih and Dmitry Itsykson. On Tseitin formulas, read-once branching programs and treewidth. In proceedings of CSR 2019, volume 11532 of Lecture Notes in Computer Science, pages 143-155, 2019.

[7] Nicola Galesi, Dmitry Itsykson, Artur Riazanov, and Anastasia Sofronova. Bounded-depth frege complexity of tseitin formulas for all graphs. In proceedings of 44th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science, MFCS 2019, volume 118 of Leibniz International Proceedings in Informatics, pages 49:1-49:15, 2019.

Препринты:

[14] Dmitry Itsykson, Artur Riazanov, Danil Sagunov, and Petr Smirnov. Almost tight lower bounds on regular resolution refutations of Tseitin formulas for all constant-degree graphs. Technical Report TR-19-178, Electronic Colloquium on Computational Complexity, 2019.

2 Участие в конференциях

Я делал доклады на следующих конференциях

- 14th International Computer Science Symposium in Russia (CSR 2019), Новосибирск, July 1-5, 2019. Тема доклада: On Tseitin formulas, read-once branching programs and treewidth. Наша статья в соавторстве с Л.В. Глинских на этой конференции получила премию за лучшую статью.
- 44th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science. Aachen (Germany), August 26-30, 2019. Тема доклада: Bounded-Depth Frege Complexity of Tseitin Formulas for All Graphs.
- Problems in Theoretical Computer Science 2019. 29.11-01.12.2019, Москва. Тема доклада: Bounded-Depth Frege Complexity of Tseitin Formulas for All Graphs.

Также я участвовал в конференции Randomness, Information, Complexity, 12 - 14 июня 2019 в Москве без доклада.

3 Педагогическая деятельность

Для студентов магистратуры СПбАУ РАН, обучающихся по направлению «теоретическая информатика», в весеннем семестре 2019-го года я прочитал курсы лекций: «Дополнительные главы дискретной математики» и «Дополнительные главы теории сложности». В СПбГУ на факультете математики и компьютерных наук в осеннем семестре 2019-го года я прочитал курс лекций студентам бакалавриата «Дискретная математика 3». Также я прочитал миникурс «Сложность пропозициональных доказательств» в Computer Science клубе в Новосибирске для студентов НГУ.

В 2019 году под моим руководством защитили выпускные квалификационные работы два студента магистратуры СПбАУ РАН:

- А.А. Рязанов, «Сложность вывода в системах доказательств, основанных на ветвящихся программах»;
- М.Л. Матдинов, «Нижняя оценка на доказательство формулы в системе $\mathrm{OBDD}(\wedge, \mathrm{reordering})$».

До сентября 2019 года я руководил аспиранткой Л.В. Глинских, в сентябре она переехала в США и стала учиться в аспирантуре университета Бостона. В настоящее время я руковожу двумя аспирантами (А.А. Рязановым и С.И. Грязновым) и одним магистрантом (П.Ю. Смирнов).

4 Полученные результаты

Результаты этого года связаны с изучением сложности вывода цейтинских формул в разных пропозициональных системах доказательств.

Цейтинские формулы строятся по произвольному неориентированному графу без циклов $G(V, E)$ и функции пометок $c : V \to \{0, 1\}$. Цейтинская формула $\mathrm{T}(G, c)$ зависит от пропозициональных переменных x_e для $e \in E$. Для каждого $v \in V$ определяется условие четности в вершине v как $P_v := \left(\sum_{e \text{ инцидентно } v} x_e = c(v) \bmod 2\right)$. Цейтинская формула $\mathrm{T}(G, c)$ является конъюнкцией условий четности для всех вершин графа, представленных в КНФ: $\bigwedge_{v \in V} P_v$. Известен простой критерий выполнимости цейтинских формул: цейтинская формула $\mathrm{T}(G, c)$ выполнима тогда и только тогда, когда в каждой ее компоненте связности сумму пометок четна [18].

Во многих слабых системах доказательств невыполнимые цейтинские формулы требуют экспоненциального по размеру доказательства для специфических семейств графов [18, 3, 15, 12, 4, 10]. Обычно нижние оценки доказываются для цейтинских формул, основанных на экспандерах, а вопрос сложности вывода для произвольных графов изучался мало. Основной целью нашего исследования являлось определение сложности цейтинских формул относительно свойств графа. Подходящим для этого параметром оказалась древесная ширина графа.

4.1 $\mathrm{OBDD}(\wedge, \mathrm{reordering})$

В работе [9] нами изучалась сложность вывода цейтинских формул в системе доказательств $\mathrm{OBDD}(\wedge, \mathrm{reordering})$. Ранее в этой системе доказательств была получена экспоненциальная нижняя оценка на сложность вывода цейтинских формул, если граф является достаточно хорошим спектральным экспандером [13].

Мы сначала доказываем теорему о сложности вычисления выполнимых цейтинских формул однопроходными недетерминированными ветвящимися программами (1-NBP):

Теорема 4.1. Размер произвольной 1-NBP, вычисляющей выполнимую цейтинскую формулу $\mathrm{T}(\mathrm{grid}_n, c)$, не меньше, чем $2^{\Omega(n)}$, где grid_n — это граф клетчатого квадрата $n \times n$.

Чтобы получить нижнюю оценку для произвольного графа мы пользуемся теоремой о выделении минора-сетки. Теорема о выделении минора-сетки гласит, что в произвольном графе G есть минор клетчатый квадратик $t \times t$, где $t = \Omega(\mathrm{tw}(G)^{\delta})$, а $\mathrm{tw}(G)$ — это древесная ширина графа G. Более слабый вариант этой теоремы был доказан Сеймором и Робертсоным [17], в сформулированном виде результат принадлежит Юлии Чужой [5], последний самый сильный результат [6] утверждает, что эта теорема верна для $\delta = \frac{1}{10}$, в общем случае δ не может быть больше $1/2$, однако для некоторых классов графов, например, для планарных, известно, что $\delta = 1$ [16]. Мы применили эту теорему к теореме 4.1 и получили утверждение для всех графов.

Теорема 4.2. Размер произвольной 1-NBP, вычисляющей выполнимую цейтинскую формулу $\mathrm{T}(G, c)$, не меньше, чем $2^{\Omega(\mathrm{tw}(G)^{\delta})}$.

Также мы показали верхнюю оценку.

Теорема 4.3. Существует OBDD, вычисляющая выполнимую цейтинскую формулу $\mathrm{T}(G, c)$, построенную по графу $G(V, E)$, размера $O(2^{\mathrm{pw}(G)}|E|)$, где $\mathrm{pw}(G)$ — это путевая ширина графа G.

Мы также использовали теорему 4.1 и теорему о выделении минора-сетки для доказательства нижней оценки на сложность вывода невыполнимых цейтинских формул в системе доказательств OBDD$(\wedge, \mathrm{reordering})$. И доказали следующую теорему.

Теорема 4.4. Размер любого OBDD$(\wedge, \mathrm{reordering})$ опровержения невыполнимой цейтинской формулы $\mathrm{T}(G, f)$ не меньше, чем $2^{\Omega(\mathrm{tw}(G)^{\delta})}$.

4.2 Системы Фреге ограниченной глубины

В статье [7] мы применяем теорему о выделении минора-сетки для доказательства нижней оценки на сложность вывода в системе Фреге ограниченной глубины. Мы используем теорему Хостада.

Теорема 4.5 ([12])**.** Существует такая константа константа $K > 0$, что для любого $d \le \frac{K \log n}{\log \log n}$ любой вывод невыполнимой цейтинской формулы $\mathrm{T}(\mathrm{grid}_n, c)$ в системе Фреге глубины d имеет размер как минимум $2^{n^{\Omega(1/d)}}$.

Мы обобщаем эту теорему на произвольный граф и доказываем такую теорему.

Теорема 4.6. Существуют такие константы $K > 0$ и $C > 0$, что для любого связного графа G древесной ширины t и для каждого $d \le \frac{K \log n}{\log \log n} - C$, любой вывод в системе Фреге глубины d цейтинской формулы $\mathrm{T}(G, f)$ имеет размер как минимум $2^{t^{\Omega(1/d)}}$.

Мы доказываем верхнюю оценку, которая отличается от нижней мультипликативной константой во второй экспонение.

Теорема 4.7. Пусть $G(V, E)$ — связный неориентированный граф, а $\mathrm{T}(G, f)$ — невыполнимая цейтинская формула. Тогда для всех достаточно больших d формула $\mathrm{T}(G, f)$ имеет вывод в системе Фреге глубины d и размера $2^{\mathrm{tw}(G)^{O(1/d)}}\mathrm{poly}(|\mathrm{T}(G, f)|)$.

Класс невыполнимых формул в конъюнктивной нормальной форме $\mathcal{F}$ называется (квази-)автоматизируемым для системы доказательств Π, если существует детерминированный алгоритм, который по формуле F из $\mathcal{F}$ строит доказательство F в системе Π за время (квази-)полиномиальное от $|F| + |\tau_F|$, где $|\tau_F|$ — это размер кратчайшего доказательства формулы F в Π. Из теоремы 4.6 и результатов статей [8, 11, 1, 2] следует, что *для всех графов G*, класс цейтинских формул является *квази-автоматизируемым* для регулярной резолюции, общей резолюции и системы Фреге константной глубины. Это отвечает на открытый вопрос из статьи Алехновича и Разборова [1].

4.3 Регулярная резолюция

Верхняя и нижняя оценки, полученные для систем Фреге ограниченной глубины, отличаются квазиполиномиально. Нашей целью было получить более точную нижнюю оценку для более слабой системы доказательств.

В работе [14] мы получили такую оценку для регулярной резолюции.

Теорема 4.8. Пусть $G(V, E)$ — неориентированный граф, а формула $\mathrm{T}(G, c)$ невыпонима. Тогда размер любого регулярного резолюционного доказательства $\mathrm{T}(G, c)$ не меньше, чем $2^{\Omega(\mathrm{tw}(G)/\log(|V|))}$.

Для графов константной степени известна верхняя оценка $2^{O(\mathrm{tw}(G))}$ [8, 11, 1], т.е. оценка из теоремы 4.8 для графов константной степени оптимальна с точностью до логарифмического множителя в экспоненте.

Теорема 4.8 следует из следующих двух теорем, которые представляют отдельный интерес.

Теорема 4.9. Если существует регулярное резолюционное доказательство формулы $\mathrm{T}(G, c)$ размера S, тогда для любой функции пометок c' при которой формула $\mathrm{T}(G, c')$ выполнима, существует однопроходная ветвящаяся программа (1-BP), вычисляющая $\mathrm{T}(G, c')$ размера $S^{O(\log n)}$, где n — это число вершин в G.

Теорема 4.10. Любая 1-NBP вычисляющая выполнимую цейтинскую формулу $\mathrm{T}(G, c)$ имеет размер не менее $2^{\Omega(\mathrm{tw}(G))}$.

Заметим, что из теоремы 4.10 следует теорема 4.1 и теорема 4.10 строго сильнее, чем теорема 4.2. Интересным является план доказательства теоремы 4.10.

Упорядоченные бинарные диаграммы решений (OBDD) — это частный случай 1-NBP, однако, мы доказываем следующую лемму.

Лемма 4.1. Размер любой 1-NBP, вычисляющей выполнимую цейтинскую формулы $\mathrm{T}(G, c)$, не меньше, чем размер минимальной OBDD, вычисляющей $\mathrm{T}(G, c)$.

Чтобы оценить размер OBDD, вычисляющей выполнимую цейтинскую формулу $\mathrm{T}(G, c)$, мы вводим новую меру на графах: *компонентную ширину*. Для графа $G(V, E)$ мы определяем игру между Алисой и Бобом: у Алисы есть граф G_A, у Боба граф G_B, оба этих графа на одном множестве вершин V, в начале игры граф Алисы G_A не имеет ребер, а граф G_B совпадает с G. Каждый свой ход Боб выбирает ребро e графа G_B, удаляет его из G_B и добавляет его в G_A. Игра заканчивается, когда G_B не имеет ребер. В каждый момент игры считается значение $\#G_A + \#G_B$, где $\#H$ — это число компонент связности в графе H. В начале игры это число равняется $|V| + \#G$, цель Боба не допустить, чтобы эта величина стала слишком маленькой. В конце игры Боб платит Алисе разницу между начальным значением $|V| + \#G$ и минимальным значением $\#G_A + \#G_B$, которое случилось в течение игры. *Компонентной шириной* графа G (мы обозначаем ее $\mathrm{compw}(G)$) называется минимальная величина, которую Боб может заплатить в этой игре.

Мы доказываем следующую теорему.

Теорема 4.11. Пусть $G(V, E)$ — неориентированный граф, а цейтинская формула $\mathrm{T}(G, c)$ выполнима. Тогда размер любой OBDD, вычисляющей $\mathrm{T}(G, c)$, не меньше $2^{\mathrm{compw}(G)}$. Существует OBDD размера $2^{\mathrm{compw}(G)}|E| + 2$, вычисляющая $\mathrm{T}(G, c)$.

Порядок переменных в минимальной OBDD соответствует стратегии Боба в игре, определяющей $\mathrm{compw}(G)$, число вершин в минимальной OBDD на каждом уровне в точности равняется $2^{|V| + \#G - (\#G_A + \#G_B)}$.

Мы доказываем связь мужду древесной, путевой и компонентной шириной:

Теорема 4.12. Для любого графа G выполняется неравенство $\mathrm{pw}(G) + 1 \geq \mathrm{compw}(G) \geq \frac{1}{2}(\mathrm{tw}(G) - 1)$.

Нижняя оценка в доказательстве теоремы 4.12 основана на явном построении древесной декомпозиции по стратегии Боба в игре.

Теорема 4.10 следует из леммы 4.1, теоремы 4.11 и теоремы 4.12.

Список литературы

[1] Michael Alekhnovich and Alexander A. Razborov. Satisfiability, branch-width and tseitin tautologies. *Computational Complexity*, 20(4):649–678, 2011.

[2] Paul Beame, Chris Beck, and Russell Impagliazzo. Time-space trade-offs in resolution: Superpolynomial lower bounds for superlinear space. *SIAM J. Comput.*, 45(4):1612–1645, 2016.

[3] Eli Ben-Sasson. Hard examples for bounded depth Frege. In *Proceedings on 34th Annual ACM Symposium on Theory of Computing, May 19-21, 2002, Montréal, Québec, Canada*, pages 563–572, 2002.

[4] Samuel R. Buss, Dima Grigoriev, Russell Impagliazzo, and Toniann Pitassi. Linear gaps between degrees for the polynomial calculus modulo distinct primes (abstract). In *Proceedings of the 14th Annual IEEE Conference on Computational Complexity, Atlanta, Georgia, USA, May 4-6, 1999*, page 5, 1999.

[5] Julia Chuzhoy. Excluded grid theorem: Improved and simplified. In *Proceedings of STOC-2015*, pages 645–654, 2015.

[6] Julia Chuzhoy and Zihan Tan. Towards tight(er) bounds for the excluded grid theorem. In *Proceedings of the Thirtieth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SODA '19, pages 1445–1464, Philadelphia, PA, USA, 2019. Society for Industrial and Applied Mathematics.

[7] Nicola Galesi, Dmitry Itsykson, Artur Riazanov, and Anastasia Sofronova. Bounded-depth frege complexity of tseitin formulas for all graphs. In *44th International Symposium on Mathematical Foundations of Computer Science, MFCS 2019, August 26-30, 2019, Aachen, Germany*, volume 118 of *Leibniz International Proceedings in Informatics*, pages 49:1–49:15, 2019.

[8] Nicola Galesi, Navid Talebanfard, and Jacobo Torán. Cops-robber games and the resolution of tseitin formulas. In Olaf Beyersdorff and Christoph M. Wintersteiger, editors, *Theory and Applications of Satisfiability Testing - SAT 2018 - 21st International Conference, SAT 2018, Held as Part of the Federated Logic Conference, FloC 2018, Oxford, UK, July 9-12, 2018, Proceedings*, volume 10929 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 311–326. Springer, 2018.

[9] Ludmila Glinskih and Dmitry Itsykson. On Tseitin formulas, read-once branching programs and treewidth. In *Computer Science - Theory and Applications - 14th International Computer Science Symposium in Russia, CSR 2019, Novosibirsk, Russia, July 1-5, 2019, Proceedings*, volume 11532 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 143–155, 2019. Full version is available as ECCC technical report TR19-20.

[10] Dima Grigoriev. Linear lower bound on degrees of Positivstellensatz calculus proofs for the parity. *Theor. Comput. Sci.*, 259(1-2):613–622, 2001.

[11] Daniel J. Harvey and David R. Wood. The treewidth of line graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 132:157 – 179, 2018.

[12] Johan Håstad. On small-depth frege proofs for tseitin for grids. In Chris Umans, editor, *58th IEEE Annual Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS 2017, Berkeley, CA, USA, October 15-17, 2017*, pages 97–108. IEEE Computer Society, 2017.

[13] Dmitry Itsykson, Alexander Knop, Andrei Romashchenko, and Dmitry Sokolov. On OBDD-based algorithms and proof systems that dynamically change order of variables. In *STACS-2017*, pages 43:1–43:14, 2017.

[14] Dmitry Itsykson, Artur Riazanov, Danil Sagunov, and Petr Smirnov. Almost tight lower bounds on regular resolution refutations of Tseitin formulas for all constant-degree graphs. Technical Report TR-19-178, ECCC, 2019.

[15] Toniann Pitassi, Benjamin Rossman, Rocco A. Servedio, and Li-Yang Tan. Poly-logarithmic frege depth lower bounds via an expander switching lemma. In *Proceedings of the 48th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing, STOC 2016, Cambridge, MA, USA, June 18-21, 2016*, pages 644–657, 2016.

[16] N. Robertson, P. Seymour, and R. Thomas. Quickly excluding a planar graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 62(2):323 – 348, 1994.

[17] Neil Robertson and Paul D. Seymour. Graph minors. v. excluding a planar graph. *J. Comb. Theory, Ser. B*, 41(1):92–114, 1986.

[18] A. Urquhart. Hard examples for resolution. *JACM*, 34(1):209–219, 1987.