

Отчет за 2020 год по конкурсу "Молодая математика России"

Иванов Александр, Санкт-Петербург, ПОМИ РАН

Основные научные результаты

Основные результаты, полученные в этом году, посвящены изучению теории Янга–Миллса, теоремы Атьи–Патоли–Зингера об индексе, теории теплового ядра, а также вычислению вакуумных диаграмм из теории интегрируемых моделей, и подробно изложены в пяти работах, перечисленных ниже. Для четкости изложения новых результатов, исследования можно разделить на несколько частей.

Первая часть работы посвящена изучению теоремы Атьи–Патоли–Зингера об индексе на многообразии. Говоря научным языком, такая теорема устанавливает равенство между индексом оператора Дирака на многообразии с границей, интегралом от плотности Понтрягина по внутренности многообразия и η -инвариантом для вспомогательного оператора Дирака на границе. Такое соотношение весьма примечательно с точки зрения теоретической физики, поскольку плотность Понтрягина является локальной аксиальной аномалией и выражается через коэффициенты асимптотического разложения теплового ядра, в то время как η -инвариант можно использовать для определения аномалии четности.

Недавняя и довольно плодотворная идея заключалась в применении теоремы об индексе для случая конфигураций типа доменных стенок, которые могут быть определены как подмногообразия, на которых компоненты связности испытывают скачок. Именно это и происходит на доменных стенках в ферромагнетике.

В статье [1] рассматривается случай доменных стенок, когда компоненты калибровочной связности испытывают скачок, в то время как Риманова связность остается гладкой. Доказательство было разделено на два этапа. Сперва на многообразии было наложено дополнительное ограничение в виде прямого произведения. В этом случае теорема доказывается путем анализа рекуррентных соотношения для коэффициентов асимптотического разложения теплового ядра. Затем, на втором этапе, дополнительное ограничение было снято, а основными стадиями доказательства стали введение регуляризации и анализ характеристических полиномов. В обоих случаях многообразия подвергались различными деформациям, поэтому часть работы посвящена доказательству того, что индекс оператора Дирака инвариантен относительно использованных преобразований.

Работа [2] является продолжением предыдущей статьи и посвящена обобщению теоремы об индексе на более широкий класс доменных стенок. В этом случае мы предполагаем, что не только компоненты калибровочной связности испытывают скачок на некоторой поверхности, но также и компоненты Римановой связности. При этом мы оставляем метрический тензор непрерывным. Доказательство основано на специальной деформации многообразия и анализе инвариантных полиномов, а также их трансгрессий. В ходе работы также вводится понятие

обобщенной относительной спектральной асимметрии и доказываем согласованность нового определения и старого. Такая функция позволяет записать теорему об индексе в более естественной форме.

В работе [3] изучена двухпетлевая мастер-диаграмма для двумерного и многомерного ($d > 2$) случаев. При этом, второй вариант разобран для пропагаторов скалярного типа. Такие диаграммы возникают в квантовой теории поля, а также в теории интегрируемых моделей. В ходе работы была получена общая схема вычисления двухпетлевых диаграмм путем применения преобразования Меллина–Барнса и цепного правила. В результате, вычисление подобного рода диаграмм было сведено к подсчету одного интеграла, а также к нахождению коэффициентов для цепного правила и преобразования Меллина–Барнса. В двумерном случае коэффициенты являлись известными, поэтому основной задачей был подсчет заключительного интеграла. Это привело к явному вычислению и представлению ответа в виде билинейной комбинации гипергеометрических функций. В многомерном случае основная сложность заключалась в отсутствии коэффициентов для цепных правил, поэтому они были заменены дополнительными соотношениями.

Статья [4] посвящена выводу нерекурсивной формулы для коэффициентов асимптотического разложения теплового ядра для оператора Лапласа с гладкими компонентами связности и потенциалом, а также новому доказательству справедливости представления интегралом по путям. Более детальное описание основной части этой работы было дано в отчете за 2019 год. Однако в этом году, с учетом комментариев рецензентов, были внесены некоторые несущественные поправки.

В работе [5] получена двухпетлевая перенормировка эффективного действия для теории Янга–Миллса в четырехмерном пространстве-времени при помощи регуляризации с импульсом обрезания. Несмотря на простоту постановки вопроса эта задача долгое время оставалась открытой. В основном это связано с наличием трудоемких расчетов и отсутствием удобного формализма для работы.

В указанной статье мы последовательно разбираем асимптотическое разложение для функции Грина, когда ее аргументы близки, затем вводим формализм, в терминах которого вычисления значительно упрощаются, и определяем правила регуляризации. После этого мы вычисляем все расходящиеся вклады от сильно-связных диаграмм и перенормируем константу связи. Более того, мы также изучаем свойства константы связи как функционала от сдвига функции Грина специального вида. При этом мы показываем, что полученный ответ согласуется с результатом, полученным при использовании размерной регуляризации. По ходу работы также выводятся новые свойства для регулярной части функции Грина, а также предлагается альтернативный метод подсчета первой петли.

Опубликованные и поданные в печать работы

- 1) A. V. Ivanov and D. V. Vassilevich, “Atiyah–Patodi–Singer index theorem for domain walls”, J. Phys. A: Math. Theor. 53, 305201 (2020)
- 2) A. V. Ivanov, "Index Theorem for Domain Walls", arXiv:2008.02058 [math-ph] (2020)
- 3) С. Э. Деркачев, А. В. Иванов, Л. А. Шумилов, “Преобразование Меллина–Барнса для двухпетлевой мастер-диаграммы”, Вопросы квантовой теории поля и статистической физики. 27, Зап. научн. сем. ПОМИ, 494, ПОМИ, СПб., 144–167 (2020)
- 4) А. В. Иванов, Н. В. Харук, “Тепловое ядро: метод собственного времени, калибровка Фока–Швингера, интеграл по путям и линия Вильсона”, ТМФ, 205:2 (2020), 242–261; Theoret. and Math. Phys., 205:2 (2020), 1456–1472
- 5) A. V. Ivanov and N. V. Kharuk, “Two-loop cutoff renormalization of 4-D Yang–Mills effective action”, J. Phys. G: Nucl. Part. Phys. 48, 015002 (2020)

Участие в конференциях и школах

Online Mini-Courses in Spectral Theory and Mathematical Physics, 3 November 2020 to 3 December 2020, via Zoom

Работа в научных центрах и международных группах

И. о. младшего научного сотрудника в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера ПОМИ РАН.

Педагогическая деятельность

Являюсь научным руководителем студента 3/4 курса Академического университета (СПбАУ).