

Отчет по конкурсу «Молодая математика России»
Иванов Александр Валентинович
2021 год

Основные научные результаты

Итогом работы за 2021 год являются четыре опубликованные статьи и два препринта. Для систематизации и удобства изложение результатов будет разделено на пять частей, каждая из которых будет связана с соответствующей работой.

Статья [1] частично была включена в отчет 2020-го года. На тот момент текст находился на стадии препринта и был отправлен в журнал «Journal of Physics A». Работа посвящена обобщению теоремы Атьи–Зингера–Патоли об индексе на более широкий класс компактных гладких римановых многообразий без границы с доменными стенками. Предполагается, что не только компоненты калибровочной связности испытывают скачок на некоторой поверхности ко-размерности 1, но также и компоненты римановой связности. При этом метрический тензор остается непрерывным.

За время рецензирования в работе появились некоторые изменения. К примеру, часть вычислений стала более компактной, во введении появилась дополнительная вспомогательная информация, позволяющая понять постановку задачи без многократного обращения к другим источникам. Также было скорректировано новое определение обобщенной относительной спектральной асимметрии, которое полностью согласуется со стандартным.

Работа [2] посвящена обобщению понятия интеграла Густафсона на случай группы $SL(2, R)$. Давайте кратко сформулируем актуальность вопроса и результаты статьи. Впервые интегралы Густафсона первого и второго типов появились в работах при изучении многомерных интегралов с параметрами, а также их деформированных q -аналогов. В качестве приложений стоит отметить теорию ортогональных полиномов, а также дуальность в суперсимметричной квантовой теории поля. Одно из последних и достаточно плодотворных направлений связано с исследованием интегрируемых моделей. Так при анализе спиновых цепочек для группы $SL(2, C)$ появилась необходимость в независимом выводе интегралов Густафсона первого и второго типов. Вывод основан на обобщении формул суммирования из работы Густафсона на случай «комплексных» Гамма-функций.

В новой работе было обобщено понятие интеграла Густафсона на случай Гамма-функций, возникающих при анализе группы $SL(2, R)$. Такие Гамма-функции могут быть представлены в виде произведения стандартной Гамма-функции на косинус или синус. Как известно, формула Планшереля для указанной группы содержит как интегральную часть, так и суммирование по дискретной составляющей. Это приводит к тому, что плотность меры имеет набор полюсов в комплексной плоскости, и процесс вычисления интегралов путем замыкания контуров в полуплоскости перестает быть тривиальным. Именно поэтому в новой работе доказательство основано не только на обычном использовании формул суммирования, но и на введении области интегрирования специального вида.

Статья [3] посвящена выводу нового представления для коэффициентов Рака, или b_j -символов, для группы $SL(2, R)$. Давайте по аналогии с предыдущей работой сформулируем актуальность

вопроса и основные результаты. Как известно, унитарные неприводимые представления группы $SL(2, \mathbb{R})$ были впервые исследованы Баргманном. Помимо унитарных представлений двух непрерывных серий существуют унитарные представления дискретных серий. Этот факт делает исследование группы более сложным и создает определенные технические трудности. Кроме того, при разложении тензорного произведения двух унитарных представлений непрерывных серий на неприводимые возникают представления дискретных серий, а представления непрерывной серии входят с кратностью два. Несмотря на это, разложение тензорного произведения двух представлений ($3j$ -символы или коэффициенты Клебша--Гордана) для группы $SL(2, \mathbb{R})$ были давно изучены.

Задача о вычислении коэффициентов Рака, связанных с разложением тензорного произведения трех представлений, решена до сих пор лишь частично. Наличие в разложении представлений из разных серий (непрерывной и дискретной) приводит к тому, что вычисление $6j$ -символов, или коэффициентов Рака, распадается на множество отдельных задач. Случаи, когда тройное произведение содержит хотя бы один множитель из дискретной серии, были изучены Гронефельтом.

В данной работе мы (совместно с С.Э.Деркачевым) изучаем разложение тензорного произведения трех представлений, когда все факторы являются представлениями из непрерывной серии. Мы выводим новое диаграммное представление для коэффициентов Рака, а также производим явные вычисления для случая, когда в промежуточных разложениях участвуют представления только из непрерывной серии. Основная идея состоит в применении методов, разработанных для вычисления диаграмм Фейнмана: цепное соотношение, трюк Горишнего--Исаева и преобразование Меллина--Барнса.

Статья [4] посвящена изложению квантовой теории поля на примере простейшей кубической модели. Она носит методический характер и может быть в дальнейшем использована как вводный курс в методы квантовой теории поля для студентов бакалавриата. Дело в том, что математический аппарат квантовой теории поля в стандартных монографиях излагается достаточно общо и не всегда подходит начинающим исследователям для первого знакомства.

Мы (совместно с М.А.Русских) предлагаем в своей работе разбор таких методов и объектов как функциональное интегрирование, диаграммы Фейнмана, производящие функции и метод фонового поля на примере простейшей кубической модели. Такой подход позволяет провести все вычисления явно, что значительно повышает усваиваемость материала. Также мы аккуратно и достаточно подробно выводим диаграммные соотношения, например, связь между связными и сильно связными графами, которые остаются справедливыми и в случае модели более общего характера.

В работе [5] мы (совместно с Н.В.Харук) изучаем асимптотическое разложение теплового ядра для оператора Лапласа на гладком компактном римановом многообразии без границы при достаточно малых значениях собственного времени. Также предполагается, что все коэффициенты оператора Лапласа являются гладкими функциями.

Как известно, коэффициенты Сили--деВитта этого разложения удовлетворяют набору достаточно примечательных рекуррентных соотношений, которые мы используем для построения двух семейств функций специального вида. Используя эти функции, мы находим разложение теплового ядра для обратного оператора Лапласа для произвольного значения размерности пространства. Мы также показываем, что новые функции обладают некоторыми важными

свойствами. Например, мы можем рассматривать оператор Лапласа на множестве новых функций как оператор сдвига по индексу.

Также мы разбираем различные приложения, полезные в теоретической физике, такие как регуляризация в теории перенормировки и интегралы из теории аномалий, и, в частности, находим разложение функций Грина в терминах новых функций.

Препринт [6] был подготовлен совместно с Д.В.Василевичем и М.А.Курковым. В работе изучается спектральная геометрия оператора Дирака с абелевым калибровочным полем и аксиальным векторным полем. В качестве граничных условий выбрано граничное условие типа "мешка" с переменной киральной фазой. Мы устанавливаем основные свойства спектральных функций, которые обеспечивают применимость регуляризации дзета-функции и обычных формул теплового ядра для аномалий киральности и четности. Также мы разрабатываем вычислительные методы, включая теорию возмущений для теплового ядра, и показываем, что слагаемые в обеих аномалиях, включающие электромагнитный потенциал, не зависят от киральной фазы.

В качестве приложений для полученных формул можно отметить полуметаллы Вейля, которые, без сомнения, являются одними из самых интересных новых материалов. Спектр квазичастиц в таком материале описывается оператором Дирака, содержащим постоянное аксиальное векторное поле. Это поле отвечает за существование состояний с довольно необычными дисперсионными соотношениями – так называемыми дугами Ферми. В безмассовом случае аксиальное поле может быть удалено киральным преобразованием за счет включения в действие аномального члена. Одним из проявлений такого слагаемого является киральный магнитный эффект, заключающийся в появлении электрического тока в направлении внешнего магнитного поля.

Работа в научных центрах и международных группах

И. о. младшего научного сотрудника в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера ПОМИ РАН.

Педагогическая деятельность

Являюсь научным руководителем двух студентов, обучающихся на первом курсе магистратуры научного исследовательского института «Высшая школа экономики» в Санкт-Петербурге.

С сентября 2021 года являюсь организатором и ведущим студенческого семинара на базе ПОМИ РАН по изучению работ в области математической и теоретической физики, посвященных заменам переменных специального вида в квантовой теории поля.

Доклады на конференциях

1) International conference «Days on Diffraction», may 31 – june 4, 2021, St. Petersburg Branch of the Steklov Mathematical Institute;

2) Международная научная конференция «Уфимская осенняя математическая школа», 6–9 октября 2021 г., Башкирский государственный университет, г. Уфа;

3) Научная конференция «Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы», 25–29 октября 2021 г., г. Белгород;

4) VII Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Современные проблемы физико-математических наук» (СПФМН-2021), 18–21 ноября 2021 г., Орловский государственный университет имени И.С. Тургенева, г. Орёл.

Участие в школах

1) Moduli Spaces, Combinatorics and Integrable Systems, November 15–26, 2021, EIMI, St. Petersburg, Russia;

2) The 3rd Letelier School on Mathematical Physics, November 29 – December 3, 2021, Brazil, online.

Итог работы

При подаче заявки на конкурс предполагалось изучить нерекурсивные формулы для коэффициентов Сили–деВитта из разложения теплового ядра, включая их континуальное представление, а также исследовать некоторые аспекты теории представлений для группы $SL(2, \mathbb{R})$, такие как $6j$ -символы и интеграл Густафсона. Все эти темы были изучены и по итогам работы были опубликованы соответствующие статьи.

Кроме того, постановка задачи для исследования коэффициентов Сили–деВитта была расширена. В итоге дополнительно был построен формализм для работы с расходимостями в теории Янга–Миллса и в скалярных теориях, доказана теорема Атьи–Зингера–Патоди об индексе на компактных многообразиях без края с условием доменных стенок, начато изучение теплового ядра на многообразии с границей, а также построены функции специального вида.

Всего за три года выполнения проекта было написано 13 работ, 11 из которых уже опубликованы в журналах (плюс 2 препринта).

Список работ

[1] A. V. Ivanov, Index theorem for domain walls, *Journal of Physics A* **54**, 095203 (2021)

[2] А. В. Иванов, Об интегралах Густафсона для группы $SL(2, \mathbb{R})$, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **509**, 113–122 (2021)

[3] С. Э. Деркачев, А. В. Иванов, Коэффициенты Рака для группы $SL(2, \mathbb{R})$, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **509**, 99–112 (2021)

[4] А. В. Иванов, М. А. Русских, Квантовая теория поля на примере простейшей кубической модели, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, **509**, 123–153 (2021)

[5] A. V. Ivanov, N. V. Kharuk, Two Function Families and Their Application to Hankel Transform of Heat Kernel, arXiv:2106.00294 [math-ph] (2021)

[6] A. V. Ivanov, M. A. Kurkov, D. V. Vassilevich, Heat Kernel, Spectral Functions and Anomalies in Weyl Semimetals, arXiv:2111.11493 [math-ph] (2021)