ОТЧЕТ ПО КОНКУРСУ «МОЛОДАЯ МАТЕМАТИКА РОССИИ» ЗА 2019 ГОД

И. Махлин

1. Научные результаты

1.1. ПБВ-вырождения многообразий Шуберта. Рассмотрим неприводимое представление L_λ со старшим весом λ группы $G = SL_n(\mathbb{C})$. В проективизации $\mathbb{P}(L_\lambda)$ обозначим $\boldsymbol{v}_\lambda$ точку, отвечающую прямой старших векторов. Хорошо известно, что для максимальной нильпотентной подалгебры (строго нижнетреугольных матриц) $N \subset G$ замыкание орбиты $F = \overline{N\boldsymbol{v}_\lambda} \subset \mathbb{P}(L_\lambda)$ является многообразием частичных флагов и зависит только от стабилизатора W_λ в группе Вейля W. Другими словами, это многообразие зависит только от того, какие координаты у λ ненулевые (в базисе из фундаментальных весов), но не от самих значений координат.

Аналогичный факт имеет место для ПБВ-вырождений многообразий флагов. Для нильпотентной подалгебры $\mathfrak{n}_- \subset \mathfrak{sl}_n(\mathbb{C})$ можно рассмотреть ПБВ-фильтрацию на $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$, которая (действием на старший вектор) задаст фильтрацию на L_λ. Присоединенное градуированное пространство L^a_λ называется *ПБВ-вырождением* представления L_λ. Нетрудно видеть, что на L^a_λ действует абелева группа Ли N^a изоморфная $\mathbb{C}^{n(n-1)/2}$ с операцией сложения. ПБВ-вырождение многообразия флагов F определяется как замыкание орбиты $F^a = \overline{N^a\boldsymbol{v}^a_\lambda} \subset \mathbb{P}(L^a_\lambda)$, где точка $\boldsymbol{v}^a_\lambda$ отвечает прямой старших векторов в L^a_λ. Многообразие F^a, опять же, однозначно определяется стабилизатором W_λ, т. е. зависит от λ так же как и классические многообразия флагов ([Fe]). Это обстоятельство – фундаментальный факт в теории ПБВ-вырождений, получившей широкое развитие в последнее десятилетие.

Естественный шаг здесь — поиск обобщения этой теории на модули Демазюра и многообразия Шуберта. Модуль Демазюра $D_{w\lambda} \subset L_\lambda$ для $w \in W$ определяется как $\mathfrak{n}^+$-подмодуль (противоположная нильпотентная подалгебра), порожденный экстремальным вектором с весом $w\lambda$. Это позволяет сразу определить ПБВ-вырождение модуля Демазюра $D^a_{w\lambda}$ и замыкание орбиты $X^a_{w\lambda}$ по аналогии с вышесказанным. Последнее многообразие естественно называть ПБВ-вырождением многообразия Шуберта $X_w \subset F$, т. к. соответствующее замыкание орбиты в $\mathbb{P}(D_{w\lambda})$ есть X_w (которое при фиксированном w, опять же, однозначно определеяется стабилизатором W_λ).

Модули $D^a_{w\lambda}$ и многообразия $X^a_{w\lambda}$ изучались в работах [Fo, BF, CFF]. В частности, при некоторых ограничениях на старший вес λ или перестановку w было показано, что $X^a_{w\lambda}$ действительно определеяется стабилизатором W_λ. Специалисты в этой области ожидали, что этот факт распространяется и на произвольные λ и w (такие предположения высказывались в рамках устных выступлений и обсуждений). Тем не менее, в работе [M2] было показано следующее.

Теорема 1. Для $n = 6$, $w = [6, 4, 2, 5, 3, 1]$, $\lambda = (1, 1, 0, 1, 1)$ и $\mu = (2, 1, 0, 1, 1)$ многообразия $X^a_{w\lambda}$ и $X^a_{w\mu}$ неизоморфны.

Этот результат показывает, что, по всей видимости, определение ПБВ-вырождения многообразия Шуберта нуждается в некотором уточнении. Любопытен тот факт, что контрпример в теореме 1 — минимален, в частности, при $n \leq 5$ контрпримеров нет. Следует также отметить, что доказательство теоремы опирается на результаты компьютерных вычислений, однако их использование сведено к минимуму: двум подсчетам сумм Минковского небольших конечных множеств. Основным инструментом в доказательстве является изучение т. н. *картановских компонент*, т. е. циклических подмодулей, порожденных произведением младших векторов, в произведениях вида $D^a_{w\lambda} \otimes D^a_{w\mu}$. Для поиска этого контрпримера были, естественно, произведены гораздо более сложные вычисления — с этой целью был разработан целый комплекс программ в системах компьютерной алгебры SageMath и Wolfram Mathematica.

1.2. Неабелевы фильтрации и вырождения Гельфанда–Цетлина. Теорию ПБВ-вырождений можно обобщать и в другом направлении. Идея здесь заключается в том, чтобы вместо стандартной фильтрации на $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$ по ПБВ степени рассмотреть другую, затем, опять же, индуцировав фильтрацию на L_λ и взяв присоединенное градуированное пространство $\mathrm{gr}\, L_\lambda$. После этого можно определить вырожденное многообразте флагов, как замыкание орбиты в $\mathbb{P}(L_\lambda)$ (как это делалось в [FaFFM]) или, при отсутствии действия группы, некоторым похожим образом (как это делалось в [M1]). В частности, одной из целей последней работы было показать, что торическое многообразие многогранника Гельфанда–Цетлина (пожалуй, наиболее популярное торическое вырождение многообразия флагов, см. [GL, KM]) можно получить при помощи таких методов.

Для этого в [M1] был выбран следующий подход. На присоединенных градуированных пространствах определялось действие некоторой алгебры Φ_n. Эта алгебра в некотором смысле являлась деформацией алгебры $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$, однако упомянутое действие определялось ad hoc, а не возникало как вырождение действия $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$ на L_λ. После этого вырожденное многообразие флагов определялось при помощи действия экспонент образующих алгебры Φ_n на прямую старших векторов в $\mathbb{P}(\mathrm{gr}\, L_\lambda)$.

Целью проделанной в этом году работы было найти вариант этой конструкции, в котором действие возникало бы естественным образом как присоединенное градуированное (а не определялось бы ad hoc). Для этого оказалось полезным рассмотреть фильтрации *неабелевыми* упорядоченными полугруппами и присоединенные градуированные пространства относительно них. Отметим, что ранее в этой области такие конструкции не рассматривались, использовались только фильтрации группой целых чисел (как в случае описанных выше стандартных ПБВ-фильтраций) или другими абелевыми (полу)группами.

Более конкретно, в качестве полугруппы рассматривался свободный моноид $\mathcal{F}$ с образующими $\hat{f}_{i,j}$ для $1 \leq i < j \leq n$, отвечающими корневым векторам в $\mathfrak{n}_-$. Ясно, что каждому элементу в $\mathcal{F}$ отвечает ПБВ-моном в $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$. Таким образом, любое отношение порядка $\prec$ на $\mathcal{F}$, уважающее умножение, задает фильтрацию на $\mathcal{U}(\mathfrak{n}_-)$. Присоединенная градуированная алгебра $\mathcal{U}^\prec$ действует на соответствующих присоединенных градуированных пространствах $L^\prec_\lambda$.

Оказывается, что при выборе в качестве $\prec$ определенного (градуированного лексикографического) порядка аналогичная конструкция с экспонентами дает искомое торическое вырождение Гельфанда–Цетлина. Обозначим $\chi_{i,j}$ образующие алгебры $\mathcal{U}^{\prec}$ (образы образующих моноида $\hat{f}_{i,j}$). Для комплексного вектора $(c_{i,j})$ обозначим $\exp(c)$ оператор на $L_\lambda^{\prec}$, задаваемый формулой $\prod \exp(c_{i,j}\chi_{i,j})$ с упорядочиванием сомножителей сперва по i, а затем по j. Пусть, кроме того, $\boldsymbol{v}_\lambda^{\prec} \in \mathbb{P}(L_\lambda^{\prec})$ – прямая старших векторов.

Теорема 2. Для упомянутого выше порядка $\prec$ замыкание множества точек $\{\exp(c)\boldsymbol{v}_\lambda^{\prec} | c \in \mathbb{C}^{\{1\le i<j\le n\}}\} \subset \mathbb{P}(L_\lambda^{\prec})$ изоморфно торическому многообразию многогранника Гельфанда–Цетлина.

Эти результаты были включены в работу [M1] в качестве аддендума.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

(1) В журнале «Algebraic Combinatorics» вышла из печати работа *I. Makhlin, FFLV-type monomial bases for type B* ([M0]).
(2) Была написана работа *I. Makhlin, PBW degenerate Schubert varieties: Cartan components and counterexamples* ([M2]). Работа принята в печать в журнале «Algebras and Representation Theory».
(3) Была существенно дополнена (см. выше) работа *I. Makhlin, Gelfand–Tsetlin degenerations of representations and flag varieties* ([M1]). Работа находится на рецензии.

3. Участие в конференциях и школах

(1) Воркшоп «Geometric and computational aspects of representation theory of Lie algebras and quivers», Аахен, Германия, февраль 2019. Приглашенный доклад: «Gelfand-Tsetlin degenerations».
(2) Воркшоп «Degeneration Techniques in Representation Theory», Обервольфах, Германия, октябрь 2019. Приглашенный доклад: «Non-abelian PBW degenerations».

4. Педагогическая деятельность

Начиная с осенненго семестра я организую научно-исследовательский семинар «Алгебры Ли и приложения» на Факультете математики НИУ ВШЭ (`https://sites.google.com/view/lieseminar/`).

Список литературы

[BF] R. Biswal, G. Fourier, *Minuscule Schubert Varieties: Poset Polytopes, PBW-Degenerated Demazure Modules, and Kogan Faces*, Algebras and Representation Theory, 18 (2015), 1481–1503.

[CFF] R. Chirivi', X. Fang, G. Fourier, *Degenerate Schubert Varieties in Type A*, arXiv:1808.01594.

[CFR] G. Cerulli Irelli, E. Feigin, M. Reineke, *Quiver Grassmannians and degenerate flag varieties*, Algebra & Number Theory, 6 (2012), 165–194.

[FaFFM] X. Fang, E. Feigin, G. Fourier, I. Makhlin, *Weighted PBW degenerations and tropical flag varieties*, Communications in Contemporary Mathematics, https://doi.org/10.1142/S0219199718500165.

[Fe] E. Feigin, $\mathbb{G}_a^M$ *degeneration of flag varieties*, Selecta Mathematica, New Series, 18 (2012), 513–537.

[Fo] G. Fourier, *PBW-degenerated Demazure modules and Schubert varieties for triangular elements*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 139 (2016), 132–152.

[GL] N. Gonciulea, V. Lakshmibai, *Degenerations of flag and Schubert varieties to toric varieties*, Transformation Groups, 1 (1996), 215–248.

[KM] M. Kogan, E. Miller, *Toric degeneration of Schubert varieties and Gelfand–Tsetlin polytopes*, Advances in Mathematics, 193 (2005), 1–17.

[M0] I. Makhlin, *FFLV-type monomial bases for type B*, Algebraic Combinatorics, 2:2 (2019), 305–322.

[M1] I. Makhlin, *Gelfand–Tsetlin degenerations of representations and flag varieties*, `https://arxiv.org/abs/1809.02258`.

[M2] I. Makhlin, *PBW degenerate Schubert varieties: Cartan components and counterexamples*, `https://arxiv.org/abs/1904.03721`, *в печати в журнале «Algebras and Representation Theory»*.