ОТЧЕТ ПО КОНКУРСУ «МОЛОДАЯ МАТЕМАТИКА РОССИИ» ЗА 2021 ГОД

И. Махлин

1. Научные результаты

1.1. Вырождения полубесконечных грассманианов. Изучение *полубесконечных грассманианов* берет начало в работах [FF, FiM]. Грубо говоря, эти многообразия получаются из классических грассманианов при помощи замены поля комплексных чисел на кольцо степенных рядов, наподобие того, как это делается в теории арк-схем. Среди их свойств можно выделить реализацию глобальных модулей Вейля в виде когомологий пучков на этих многообразиях ([BF, FeM]) и соответствие между их точками и рациональными кривыми в классических грассманианах ([Sot, SS], в этом контексте также используется термин *квантовый грассманиан*).

В то время, как для классических грассманианов и многообразий флагов существует богатая теория их плоских вырождений (см. обзоры [Kn, FaFL]), полубесконечный случай изучен слабо. Единственная известная конструкция плоского торического вырождения полубесконечного грассманниана дана в работе [SS]. Целью нашей работы [FMP] было построение новых вырождений такого рода для частичного восполнения этого пробела. Конструкцию в [SS] можно считать обобщением на полубесконечный случай широко известного вырождения из работ [GL, KM] (отвечающего многограннику Гельфанда–Цетлина), мы же искали возможность обобщить вырождение из работ [FFL2, FaFFM] (отвечающее многограннику ФФЛВ).

Классическую алгебру Плюккера можно вложить в кольцо многочленов, а плоские вырождения грассманиана можно строить, рассматривая ее начальные подалгебры. Аналогичным образом можно реализовать полубесконечную алгебру Плюккера и затем получать вырождения полубесконечного грассманиана. В частности, такой метод используется в [SS], а полученная там начальная подалгерба является *кольцом Хиби* ([H]) некоторой дистрибутивной решетки $\mathcal{L}$. Первым шагом в нашей работе является построение ЧУМа Q такого, что решетка идеалов в Q изоморфна $\mathcal{L}$. После этого вырождение из [SS] можно проинтерпретировать как торическое многообразие *порядкового многогранника* ([Sta]) ЧУМа Q. Здесь отметим, что классические многогранники Гельфанда–Цетлина и ФФЛВ являются, соответственно, порядковым и *цепным* (ibid.) многогранником одного и того же ЧУМа. Это обстоятельство мотивирует нас искать новые вырождения полубесконечного грассманиана среди торических многообразий других многогранников, отвечающих ЧУМу Q. Однако в этом случае понятия цепного многогранника оказывается недостаточно, и мы обращаемся к более широкому семейству многогранников ЧУМов, определенному в работах [FaF, FaFLP]. Каждый такой многогранник $\Pi_{C,O}(Q)$ задается разбиением ЧУМа Q на два подмножества C и O (когда $C = \varnothing$ получается порядковый многогранник, а когда $O = \varnothing$ — цепной). Основной результат можно сформулировать следующим образом.

Теорема 1. Для определенных непустых $C \sqcup O = Q$ торическое кольцо многогранника $\Pi_{C,O}(Q)$ реализуется в виде начальной подалгебры полубесконечной алгебры Плюккера. Как следствие, торическое многообразие этого многогранника является плоским вырождением полубесконечного грассманиана.

Одним из важных следствий этой теоремы мы считаем получение мономиального базиса в полубесконечной алгебре Плюккера, обобщающего базис в классической алгебре Плюккера, параметризованный ПБВ-полустандартными таблицами Юнга ([Fe]). Полученные базисы параметризуются комбинаторным объектами, названными *ПБВ-полустандартными полубесконечными таблицами*, обобщающими ПБВ-полустандартные таблицы (в то время как в [SS] определены полубесконечные таблицы, обобщающие классическое понятие полустандартной таблицы). В частности, это дает новую комбинаторную формулу характеров для глобальных модулей Вейля со старшим весом, кратным фундаментальному.

1.2. Относительные многогранники ЧУМов и полуторические вырождения. Упомянутые выше торические вырождения, отвечающие многогранникам Гельфанда–Цетлина и ФФЛВ, существуют не только для грассманианов, но и для произвольных частичных многообразий флагов. Для каждого из этих вырождений выделяется дальнейшее, более глубокое вырождение, заданное мономиальным идеалом. Таким образом встает задача об изучении вырождений Грёбнера, лежащих между торическим и соответствующим мономиальным.

В прошлогоднем препринте [FM0] эта задача была решена для случая вырождения Гельфанда–Цетлина, там было показано, что все такие вырождения полуторические, а их неприводимые компоненты отвечают порядковым многогранникам. Однако после этого авторами была обнаружена работа [Zh], в которой доказывается общая теорема, связывающая вырождения торического многообразия с регулярными разбиениями соответствующего многогранника. Эта теорема была применена для получения в новой работе [FM] значительного обобщения прошлогодних результатов, покрывающего случай вырождения ФФЛВ, а также, к примеру, торические многообразия всех многогранников ЧУМов из работ [FaF, FaFLP].

Основным нововведением этой работы является понятие *относительных многогранников ЧУМов*. Такой многогранник задается ЧУМом $(P,<)$ вместе с еще одним порядком $<'$ на P более слабым, чем $<$. В частности, когда порядок $<'$ тривиален, мы получаем порядковый многогранник ЧУМа $(P,<)$, а когда $<'=<$, получается цепной многогранник. Более того, оказывается, что вновь определенное семейство обобщает семейство, построенное в [FaF, FaFLP], сохраняя при этом важные комбинаторные свойства: нормальность и попарную эквивалентность по Эрхарту.

Однако наибольшее значение для нас имеют проективная реализация торических многообразий относительных многогранников и описание вырождений этих торических многообразий. Эта проективная реализация задается определенным обобщением идеала Хиби, у которого, опять же, есть выделенный начальный мономиальный идеал. Из упомянутой теоремы Жу можно вывести, что каждое вырождение Грёбнера, предшествующее этому мономиальному (т. е. менее глубокое), является полуторическим, а его компоненты отвечают частям в регулярном разбиении рассматриваемого относительного многогранника. Ключевым свойством построенного семейства является замкнутость относительно разбиений такого вида: все части разбиения вновь оказываются относительными многогранниками. Благодаря этому удается получить следующее описание двух семейств полуторических вырождений многообразий флагов.

Теорема 2. Каждое вырождение Грёбнера многообразия флагов промежуточное между торическим вырождением Гельфанда–Цетлина (соотв. ФФЛВ) и соответствующим мономиальным вырождением является полуторическим. Его торические компоненты отвечают набору относительных многогранников ЧУМов, образующему регулярное разбиение многогранника Гельфанда–Цетлина (соотв. ФФЛВ).

2. Опубликованные и поданные в печать работы

(1) В журнале «Journal of Combinatorial Theory, Series A» опубликована работа [M2].
(2) Написан препринт [FMP].
(3) Написан препринт [FM].

3. Итоги трех лет

В 2019 году было неожиданно установлено, что картановские компоненты для абелевых вырождений модулей Демазюра в общем случае отличаются от самих вырожденных модулей. Это уже отличается от ситуации для невырожденных модулей и для абелевых вырождений неприводимых представлений. Однако был доказан и более сильный факт: ПБВ-вырождения многообразий Шуберта могут существенно зависеть от старшего веса определяющего их представления. Эти обнаружения расходятся с ожиданиями большинства экспертов в этой области и вынуждают искать новый подход к теории абелевых вырождений многообразий Шуберта, в том числе новые потенциальные формулировки гипотез 2 и 3 из заявки. Результаты изложены в статье [M0].

Кроме того, в 2019 году удалось найти представленческую интерпретацию для торического вырождения Гельфанда–Цетлина. Было установлено, что некоторый порядок на свободном моноиде задает фильтрацию на универсальной обертывающей алгебре, реализующую рассматриваемое торическое вырождение. Также был сформулирован и реализован подход к определению вырожденного многообразия флагов как проективного спектра суммы вырожденных представлений. Эти результаты изложены в статье [M1].

В 2020 году было получено решение задачи о явном описании максимальных конусов в веере Грёбнера. Выписать набор неравенств, задающих гиперграни конуса, удалось для мономиальных начальных идеалов, отвечающих как полустандартным таблицам Юнга, так и ПБВ-полустандартным. Полученные описания задаются в терминах соответствующих дистрибутивных решеток и соотношений выпрямления и основаны на детальном анализе этих объектов.

В качестве вспомогательных также получены несколько результатов о многообразиях Хиби, кроме того, доказаны гипотезы об изоморфизме решеток, отвечающих полустандартным и ПБВ-полустандартным таблицам Юнга. Эти результаты изложены в статье [M2].

Также в 2020 году удалось построить обширное семейство полуторических плоских вырождений многообразий флагов и многообразий Хиби. Их неприводимые компоненты задаются многогранниками, образующими регулярное разбиение многогранника Гельфанда–Цетлина или порядкового многогранника. Для каждого вырождения был найден весовой многогранник P такой, что вырождение вкладывается в его торическое многообразии, а при этом P проецируется на многогранник Гельфанда–Цетлина (или порядковый многогранник). Эти результаты вошли в препринт [FM0].

В 2021 году эти результаты были обобщены на полуторические вырождения торических многообразий существенно более широкого класса многогранников. Новые классы таких вырождений были получены для торического многообразия ФФЛВ, многообразий Хиби–Ли и всех торических многообразий многогранников ЧУМов Фана–Фурье ([FaF, FaFLP]). Все эти случаи были изучены в рамках общей теории нового семейства многогранников ЧУМов, названных относительными многогранниками. Эти результаты вошли в препринт [FM].

Кроме того, в 2021 году удалось построить новое торическое вырождение полубесконечного грассманиана. Для этого вырождение Соттиля-Штурмфельса ([SS]) было проинтерпретировано в качестве торического многообразия порядкового многогранника некоторого бесконечного ЧУМа, а новое вырождение было реализовано в виде торического многообразия другого многогранника, отвечающего тому же ЧУМу. В качестве важного следствия был получен новый мономиальный базис в полубесконечной алгебре Плюккера. Эти результаты вошли в препринт [FMP].

Список литературы

[BF] A. Braverman, M. Finkelberg, *Weyl modules and q-Whittaker functions*, Math. Ann., **359** (2014), pp. 45–59.

[FaFL] X. Fang, G. Fourier, P. Littelmann, *On toric degenerations of flag varieties*, Representation Theory - Current Trends and Perspectives, EMS Series of Congress Reports, 187–232, 2016.

[FaFFM] X. Fang, E. Feigin, G. Fourier, I. Makhlin, *Weighted PBW degenerations and tropical flag varieties*, Communications in Contemporary Mathematics, `https://doi.org/10.1142/S0219199718500165`.

[FaF] X. Fang, G. Fourier, *Marked chain-order polytopes*, European Journal of Combinatorics **58** (2016), pp. 267–282.

[FaFLP] X. Fang, G. Fourier, J.-P. Litza, C. Pegel, *A Continuous Family of Marked Poset Polytopes*, SIAM Journal on Discrete Mathematics **34** no. 1 (2020), pp. 611–639.

[FF] B. Feigin, E. Frenkel, *Affine Kac-Moody algebras and semi-infinite flag manifolds*, Communications in Mathematical Physics **128** (1990), pp. 161–189.

[Fe] E. Feigin, $\mathbb{G}_a^M$ *degeneration of flag varieties*, Selecta Mathematica, New Series, 18 (2012), 513–537.

[FFL2] E. Feigin, G. Fourier, P. Littelmann, *Favourable modules: filtrations, polytopes, Newton-Okounkov bodies and flat degenerations*, Transformation Groups **22** (2017), pp. 321–352.

[FeM] E. Feigin, I. Makedonskyi, *Semi-infinite Plücker Relations and Weyl Modules*, International Mathematical Research Notices, **14** (2020). pp. 4357–4394.

[FM0] E. Feigin, I. Makhlin, *Semitoric degenerations of Hibi varieties and flag varieties* , `https://arxiv.org/abs/2008.13243`.

[FM] E. Feigin, I. Makhlin, *Relative poset polytopes and semitoric degenerations*, https://arxiv.org/abs/2112.05894.

[FMP] E. Feigin, I. Makhlin, A. Popkovich, *Beyond the Sottile-Sturmfels degeneration of a semi-infinite Grassmannian*, https://arxiv.org/abs/2110.07397.

[FiM] M. Finkelberg; I. Mirković, *Semi-infinite flags. I. Case of global curve* $\mathbb{P}^1$, Differential topology, infinite-dimensional Lie algebras, and applications, Ser. 2 **194** (1999) pp. 81-–112.

[GL] N. Gonciulea, V. Lakshmibai, *Degenerations of flag and Schubert varieties to toric varieties*, Transformation Groups, 1 (1996), 215–248.

[H] T. Hibi, *Distributive lattices, affine semigroup rings and algebras with straightening laws*. In Commutative Algebra and Combinatorics, **11** (1987), pp. 93–109, Advanced Studies in Pure Mathematics.

[Kn] A. Knutson, *Degenerations of Schubert varieties: a survey*, for the AIM workshop "Degeneration in algebraic geometry", 2015, http://aimath.org/~farmer/print/knutson-notes.pdf.

[KM] M. Kogan, E. Miller, *Toric degeneration of Schubert varieties and Gelfand–Tsetlin polytopes*, Advances in Mathematics, 193 (2005), 1–17.

[M0] I. Makhlin, *PBW Degenerate Schubert Varieties: Cartan Components and Counterexamples*, Algebras and Representation Theory, 23 (2020), 2315–2330.

[M1] I. Makhlin, *Gelfand–Tsetlin degenerations of representations and flag varieties*, Transformation Groups, http://link.springer.com/article/10.1007/s00031-020-09622-z (Online First).

[M2] I. Makhlin, *Gröbner fans of Hibi ideals, generalized Hibi ideals and flag varieties*, Journal of Combinatorial Theory, Series A **185** (2022), 105541.

[Sot] F. Sottile, *Real rational curves in Grassmannians*, Journal of the American Mathematical Society **13** (2000), pp. 333–341.

[SS] F. Sottile, B. Sturmfels, *A sagbi basis for the quantum Grassmannian*, Journal of Pure and Applied Algebra, **158** Issues 2–3 (2001), pp. 347-366.

[Sta] R. P. Stanley, *Two poset polytopes*, Discrete & Computational Geometry, **1** (1986), pp. 9–23.

[Zh] C.-G. Zhu, *Degenerations of toric ideals and toric varieties*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, **386** (2012), 613–618.