ОТЧЕТ ПО КОНКУРСУ «МОЛОДАЯ МАТЕМАТИКА РОССИИ» ЗА 2020 ГОД

И. Махлин

1. Научные результаты

1.1. Вееры Грёбнера идеалов Плюккера. Для идеала в кольце многочленов $I \subset \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_N] = R$ и вектора $w \in \mathbb{R}^N$ можно рассмотреть *начальный идеал* $\mathrm{in}_w I \subset R$. В частности, у этого объекта есть геометрический смысл: в случае однородного идеала I схема $\mathrm{Proj}\, R/\,\mathrm{in}_w I$ является плоским вырождением (*вырождением Грёбнера*) схемы $\mathrm{Proj}\, R/I$. Всевозможные начальные идеалы данного I параметризуются его *веером Грёбнера*: оказывается, что если для идеала J обозначить $C(I, J)$ множество w, для которых $\mathrm{in}_w I = J$, то все непустые $C(I, J)$ являются полиэдральными конусами и в совокупности образуют веер.

В частности особый интерес представляет случай, когда R — кольцо многочленов от переменных Плюккера $X_{i_1<\cdots<i_k}, 1 \le k \le n-1$, а I — идеал соотношений Плюккера, задающий многообразие полных флагов в $\mathbb{C}^n$. В этом случае веер Грёбнера парамертризует вырождения Грёбнера многообразия флагов, такого вида вырождениям посвящено значительное число работ последних десятилетий: см. краткий литературный обзор [Kn], а также более подробный [FaFL1].

Заметим, что все ранее полученные результаты о структуре вееров Грёбнера идеалов Плюккера ([SS, SW, BLMM, FaFFM, M] и другие) описывают лишь определенный подвеер меньшей размерности — так называемую тропикализацию многообразия флагов. Целью нашей работы [M1] было получить первые результаты о структуре всего веера, а именно, явно задать неравенствами два его максимальных конуса. В общем случае максимальные конусы веера Грёбнера отвечают мономиальным начальным идеалам, соответственно, рассматриваемые нами конусы отвечают двум хорошо известным мономиальным базисам в алгебре Плюккера R/I. Это классический базис, заданный понятием полустандартной таблицы Юнга, а также более новый базис, отвечающий ПБВ-полустандартным таблицам ([Fe])

В обоих случаях принципиальное значение имеет структура дистрибутивной решетки на множестве переменных Плюккера. Например, в первом из двух случаев рассматривается решетка $\mathcal{L}$, заданная следующим отношением порядка: $X_{i_1,\ldots,i_k} \le X_{j_1,\ldots,j_l}$, если и только если $k > l$ или $k = l$ и $i_r \le j_r$ для всех r. Тогда интересующий нас мономиальный идеал $I^m(\mathcal{L})$ порожден мономами $X_{i_1,\ldots,i_k} X_{j_1,\ldots,j_l}$, для которых $X_{i_1,\ldots,i_k}$ и $X_{j_1,\ldots,j_l}$ — несравнимые элементы решетки. Другимии словами, в $I^m(\mathcal{L})$ входят в точности те мономы, для которых соответствующая таблица Юнга не является полустандартной.

Для того, чтобы дать нижеследующее описание конуса $C(I, I^m(\mathcal{L}))$ мы вводим два ключевых понятия. *Ромбическая пара* — это пара элементов (переменных Плюккера) $A, B \in \mathcal{L}$, для которых $A \vee B$ накрывает каждый из элементов A и B (здесь и далее мы используем стандартные обзначения $\wedge$ и $\vee$ для бинарных операций решетки). Кроме того, *специальная ромбическая пара* — это ромбическая пара A, B, для которой в идеале Плюккера I лежит соотношение вида $AB - (A \wedge B)(A \vee B) + p(A,B)q(A,B)$, где $p(A,B), q(A,B) \in \mathcal{L}$ и $q(A,B)$ накрывает $A \vee B$ (это так называемое соотношение выпрямления).

Теорема 1. Конус $C(I, I^m(\mathcal{L}))$ состоит из точек $w \in \mathbb{R}^{\mathcal{L}}$, для каждой ромбической пары A, B удовлетворяющих неравенству

$$w_A + w_B < w_{A\wedge B} + w_{A\vee B},$$

а также для каждой специальной ромбической пары A, B неравенству

$$w_A + w_B < w_{p(A,B)} + w_{q(A,B)}.$$

Каждое из указанных неравенств задает гипергрань конуса.

Во втором случае рассматривается дистрибутивная решетка $\mathcal{M}$, элементы который вновь переменные Плюккера, но отоношение порядка другое. А именно, $A \le B$, если и только если соответствующая пара столбцов образует ПБВ-полустанадртную таблицу Юнга. Изучаемый в этом случае мономиальный начальный идеал $I^m(\mathcal{M})$ содержит те мономы, для которых соответствующая таблица не является ПБВ-полустандартной. Максимальный конус $C(I, I^m(\mathcal{M}))$ описывается некоторым аналогом теоремы 1.

Отметим, что в качестве промежуточной задачи мы для произвольной решетки $\mathcal{N}$ изучаем веер Грёбнера ее идеала Хиби (идеала, порожденного выражениями $X_aX_b - X_{a\wedge b}X_{a\vee b}$) и описываем максимальный конус в этом веере. Более того, мы определяем некоторое семейство идеалов, заданных решеткой $\mathcal{N}$, обобщающее идеал Хиби, и для него решаем аналогичную задачу. Кроме того, для вывода описания конуса $C(I, I^m(\mathcal{M}))$ из теоремы 1 мы доказываем две важных гипотезы: об изоморфизме решеток $\mathcal{L}$ и $\mathcal{M}$ и о том, что решетка $\mathcal{M}$ задает структуру алгебры Ходжа на алгебре Плюккера.

1.2. Полуторические вырождения грассманианов и многообразий флагов. Сохраняя обозначения из предыдущего раздела, фиксируем $k \in [1, n-1]$ и введем подкольцо $R_k = \mathbb{C}[X_{i_1,\dots,i_k}] \subset R$, идеал $I_k = I \cap R_k$, подрешетку $\mathcal{L}_k = \{X_{i_1,\dots,i_k}\} \subset \mathcal{L}$ и мономиальный идеал $I^m(\mathcal{L}_k) = I^m(\mathcal{L}) \cap R_k$. Идеал I_k задает вложение Плюккера $\mathrm{Gr}_k(n) \subset \mathbb{P}(\wedge^k\mathbb{C}^n)$ для грассманиана.

Одна из основополагающих работ в теории плоских вырождений многообразий флагов — это [GL], в ней, в частности, показано, что идеал Хиби решетки $\mathcal{L}_k$ является начальным для идеала I_k и, таким образом, задает торическое вырождение. Обозначим этот идеал Хиби $I^h(\mathcal{L}_k)$. В работе [KM] показано, что многообразие в $\mathbb{P}(\wedge^k\mathbb{C}^n)$, заданное идеалом $I^h(\mathcal{L}_k)$ — это торическое многообразие многогранника Гельфанда–Цетлина GT_k, отвечающего k-му фундаментальному весу.

Следующий результат, полученный в работе [FM], описывает все вырождения Грёбнера грассманиана, лежащие между вырождением, заданным торическим идеалом $I^h(\mathcal{L}_k)$, и вырожденеим, заданным мономиальным идеалом $I^m(\mathcal{L}_k)$ (последнее, очевидно, представляет из себя объединение набора проективных пространств). Другими словами, соответствующий идеал J является начальным для $I^h(\mathcal{L}_k)$, а $I^m(\mathcal{L}_k)$ является начальным для J. Такие идеалы параметризуются гранями конуса $C(I^h(\mathcal{L}_k), I^m(\mathcal{L}_k))$, где идеалу J отвечает грань $C(I^h(\mathcal{L}_k), J)$.

Для такого J выберем $w \in \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ такое, что $\mathrm{in}_w I = J$. Теперь заметим, что вершины многогранника GT_k также нумеруются k-элементыми подмножествами в $[1, n]$. Это означает, что вектор w сопоставляет число каждой вершине и, таким обазом, задает регулярное полиэдральное разбиение (см. [GKZ]) многогранника GT_k, которое мы обозначим $\Theta_{GT_k}(w)$. Кроме того, обозначим Y^J подмногообразие в $\mathbb{P}(\wedge^k \mathbb{C}^n)$, заданное идеалом J.

Теорема 2. Многообразие Y^J является полуторическим — все его неприводимые компоненты являются торическими многообразиями. Эти компоненты нумеруются частями в разбиении $\Theta_{GT_k}(w)$, каждая компонента изоморфна торическому многообразию соответствующей части в разбиении.

Более того, найдено более явное описание этого полуторического вырождения следующего вида.

Теорема 3. Существует многогранник Π^J размерности $\dim C(I, J) - 1$ с выделенным набором $\binom{n}{k}$-мерных граней $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ и сюръективным линейным отображением $\pi : \Pi^J \to GT_k$ такими, что: (а) π биективно переводит грани $\Phi_1, \dots, \Phi_m$ в части разбиения $\Theta_{GT_k}(w)$, и (б) Y_J вкладывается в торическое многообразие многогранника Π^J в виде объединения замыканий орбит, отвечающих выделенным граням.

Таким образом, в работе явно описано новое семейство полуторических вырождений грассманианов. Эти результаты обобщаются нами на ситуацию многообразия Хиби (множества нулей идеала Хиби) произвольной дистрибутивной решетки, здесь вместо многогранника Гельфанда–Цетлина рассматривается соответствующий порядковый многогранник. Кроме того, конструкция также обобщена до семейства полуторических вырождений многообразия полных флагов, неприводимые компоненты которых снова задаются частями регулярных разбиений соответствующего многогранника Гельфанда–Цетлина.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

(1) В журнале «Algebras and Representation Theory» опубликована работа [M0].
(2) В журнале «Transformation Groups» опубликована работа [M].
(3) Написан препринт [M1]
(4) Написан препринт [FM].

3. Участие в конференциях и школах

(1) Школа-конференция «Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов» (Москва, январь 2020), доклад: «Вееры Грёбнера и полуторические вырождения многообразий флагов».

Список литературы

[BLMM] L. Bossinger, S. Lamboglia, K. Mincheva, F. Mohammadi, *Computing Toric Degenerations of Flag Varieties.* In: G. Smith, B. Sturmfels (eds), *Combinatorial Algebraic Geometry*, Fields Institute Communications, Vol. 80, Springer-Verlag, New York, 2017.

[FaFL1] X. Fang, G. Fourier, P. Littelmann, *On toric degenerations of flag varieties*, Representation Theory - Current Trends and Perspectives, EMS Series of Congress Reports, 187–232, 2016.

[FaFFM] X. Fang, E. Feigin, G. Fourier, I. Makhlin, *Weighted PBW degenerations and tropical flag varieties*, Communications in Contemporary Mathematics, `https://doi.org/10.1142/S0219199718500165`.

[Fe] E. Feigin, $\mathbb{G}_a^M$ *degeneration of flag varieties*, Selecta Mathematica, New Series, 18 (2012), 513–537.

[FM] E. Feigin, I. Makhlin, *Semitoric degenerations of Hibi varieties and flag varieties* , `https://arxiv.org/abs/2008.13243`.

[GKZ] I. Gelfand, M. Kapranov, A. Zelevinsky, *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Birkhäuser, Boston, 1994

[GL] N. Gonciulea, V. Lakshmibai, *Degenerations of flag and Schubert varieties to toric varieties*, Transformation Groups, 1 (1996), 215–248.

[Kn] A. Knutson, *Degenerations of Schubert varieties: a survey*, for the AIM workshop "Degeneration in algebraic geometry", 2015, `http://aimath.org/~farmer/print/knutson-notes.pdf`.

[KM] M. Kogan, E. Miller, *Toric degeneration of Schubert varieties and Gelfand–Tsetlin polytopes*, Advances in Mathematics, 193 (2005), 1–17.

[M0] I. Makhlin, *PBW Degenerate Schubert Varieties: Cartan Components and Counterexamples*, Algebras and Representation Theory, 23 (2020), 2315–2330.

[M] I. Makhlin, *Gelfand–Tsetlin degenerations of representations and flag varieties*, Transformation Groups, `http://link.springer.com/article/10.1007/s00031-020-09622-z` (Online First).

[M1] I. Makhlin, *Gröbner fans of Hibi ideals, generalized Hibi ideals and flag varieties*, `https://arxiv.org/abs/2003.02916`.

[SS] D. Speyer, B. Sturmfels, *The Tropical Grassmannian*, Advances in Geometry, **4** (2003)

[SW] D. Speyer, L. Williams, *The Tropical Totally Positive Grassmannian*, **22** (2005), 189–210